

УДК 577.4

О. І. ДУМАНСЬКИЙ¹, Ю. М. ДЕБРИНЮК²
ДИФЕРЕНЦІЙНІ МОДЕЛІ У ЗАДАЧАХ
ЛІСОВОГО ГОСПОДАРСТВА

Наведено диференційні моделі задач росту деревостанів динаміки лісового фонду, кінетики руйнування деревостанів природним шляхом або внаслідок дії антропогенних чинників. Наведені диференційні моделі дають змогу прогнозувати життєвість лісових екосистем внаслідок дії на них чинників живої та неживої природи, а також людської діяльності. Запропонована модель динаміки лісового фонду дає змогу обчислювати відчуження земельних площ та прогнозувати наслідки цього процесу.

¹ Остап Іванович ДУМАНСЬКИЙ – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри обчислювальної техніки і моделювання технологічних процесів, Національний лісотехнічний університет України. Україна, м. Львів. Тел.: +38093-657-95-20, E-mail: nauk_visnyk@gmail.com.

² Юрій Михайлович ДЕБРИНЮК – дійсний член ЛАН України, академік – секретар ЛАН України, доктор сільськогосподарських наук, професор, Національний лісотехнічний університет України. Україна, м. Львів. Тел.: +38067-195-78-36. E-mail: debrynuk@ukr.net

1. Актуальність проблеми

У окремих випадках моделювання є єдино можливим ефективним методом дослідження об'єктів та явищ. Вивчення ходу росту деревостанів, динаміки лісового фонду, вироблення підходів до якісної оцінки і прогнозування реакції деревостанів на зовнішні впливи є типовими прикладами, коли не можна обійтись без застосування моделювання. Зокрема життєдіяльність деревних рослин є важливим матеріально-енергетичним процесом, завдяки якому відбувається нагромадження продуктів фотосинтезу у вигляді маси деревини, коренів, листя, хвої тощо. Під час дослідження таких природних процесів як єдиного взаємопов'язаного цілого, з одного боку, об'єкт вивчення не доступний для прямого дослідження, з іншого – всі важливі процеси, які забезпечують нормальне його функціонування, тісно взаємопов'язані. Математичні моделі дослідження різних аспектів функціонування деревостанів та лісових екосистем дають змогу достовірніше виявити взаємозв'язки характерних параметрів об'єктів досліджень і відповідно – прогнозувати їх продуктивність та захист.

2. Огляд тематичних досліджень

На сьогодні опубліковано певну кількість монографій та наукових робіт, присвячених тематиці дослідження та побудови математичних моделей стосовно задач лісового господарства та лісовпорядкування. Це роботи Ф.С. Алексєєва [1], В.В. Амелкіна [2], К.Є. Нікітіна і А.З. Швиденка [3], Ф.С. Робертса [4], Д. Сміта [5], Г.Ф. Хільмі [6, 7], В.Е. Шмідта [8], та ін. Аналіз цих робіт підтверджує перспективність та доцільність застосування математичних моделей під час вирішення актуальних завдань лісового господарства.

Побудова математичних моделей під час вирішення лісовпорядкувальних задач у більшості випадків буде мати наближений характер, оскільки дерево, як і будь-яка рослина, є біологічним об'єктом. Але ці моделі є обов'язковими, оскільки з їх допомогою можна раціонально вести лісове господарство і оптимізувати заходи керування процесом експлуатації лісів.

У цьому дослідженні представлено побудовані диференціальні моделі задач росту деревостанів, динаміки лісового фонду, кінетики руйнування деревостанів природним шляхом або внаслідок дії зовнішніх руйнівних чинників.

3. Основний матеріал дослідження

з обґрунтуванням отриманих результатів

Розглянемо деякі типи диференціальних моделей: стосовно росту деревостанів; процесу природного руйнування деревостанів і їх відмирання у зонах антропогенних впливів; процесу природного руйнування деревостанів; процесу відмирання деревостанів у зонах антропогенних впливів.

3.1. Диференціальні моделі стосовно росту деревостанів

Модель 1. Для дерева, як біологічного об'єкта, властиві певні властивості росту. Незалежно від виду, дерево протягом певного періоду швидко росте у висоту і товщину, а потім пригальмовує ріст і, досягнувши певного віку, припиняє зовсім. Очевидно,

що із розвитком крони, з одного боку, збільшується притік енергії завдяки фотосинтезу, а з іншого – виникають труднощі, пов'язані із збільшенням обсягів та відстані транспортування живильних речовин, тобто збільшуються витрати енергії на ці потреби. Досягнувши певного віку, рослинний організм старішає, продукує менше пластичних речовин, їх не вистачає для покриття енергетичних витрат на подальше збільшення розмірів дерева і воно поступово припиняє ріст.

Складемо рівняння балансу енергії, тобто побудуємо математичну модель росту дерева, виходячи із таких умов:

зріле дерево у процесі росту зберігає геометричну подібність, тобто, із ростом дерева не змінюються відношення геометричних розмірів (наприклад, висоти до діаметра або інші);

вільну енергію (або активну речовину) дерево отримує лише за рахунок фотосинтезу;

вільна енергія засвоюється для перебігу фотосинтезу, на побудову живого середовища (росту) і на подання до точок росту живильних речовин із ґрунту;

в середньому за великий проміжок часу дерево отримує постійну кількість світла на одиницю поверхні і може поглинати потрібні речовини із необмеженого запасу.

Нехай x – лінійний розмір дерева, тобто його висота, площа поверхні листків – x^2 , об'єм дерева x^3 . Потрібно знати, $x = x(t)$ і нехай за $x_0(t_0) = 0$. Виразимо всі величини, які будуть входити у рівняння, через x .

Знайдемо вираз для вільної енергії E дерева. Ця енергія утворюється завдяки фотосинтезу у зеленій частині крони, і її є тим більше, чим більша фотосинтезна поверхня зеленої біомаси, тобто величина E пропорційна x^2 , і матимемо вираз $E = \alpha x^2$, де α – коефіцієнт пропорційності (він залежить від розмірів та форми листя та від інтенсивності фотосинтезу).

Оскільки, згідно з нашими припущеннями, інших джерел надходжень енергії немає, то встановимо розхід енергії, витраченої на ріст дерева.

Енергія витрачається передусім на потреби самого процесу фотосинтезу. Ці витрати теж пропорційні площі листової поверхні дерева, тобто βx^2 , де β – певний коефіцієнт пропорційності, але менший від α ($\beta < \alpha$).

Енергія витрачається також на транспортування живильних речовин в усі частини дерева. Очевидно, що ці витрати будуть тим більшими, чим більше шляхів транспортування, тобто чим більший об'єм самого дерева. Поряд з цим, транспортування живильних речовин пов'язане з подоланням сили ваги і буде тим більшим, чим вище дерево, тобто витрати будуть пропорційні як об'єму так і висоті x , а саме $\gamma x^3 = \gamma x^4$, де γ – певний коефіцієнт пропорційності.

Енергія витрачається також на збільшення маси дерева, тобто проходження процесу росту. Ця витрата буде пропорційна швидкості росту, тобто похідна за часом від маси ($m = g x^3$, де g – середня густина дерева, x^3 – об'єм).

Таким чином, витрата енергії дорівнюватиме

$$k \frac{d}{dt}(gx^3) = 3kgx^2 \frac{dx}{dt}.$$

Отже, маємо такий вигляд рівняння балансу

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3kgx^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\text{або} \quad \alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3kgx^2 \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Розділивши рівняння (1) на $3kgx^2$ і позначивши

$$a = \frac{\alpha - \beta}{3kg}; \quad b = \frac{\gamma}{3kg}, \text{ отримаємо: } \frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad a > 0, b > 0.$$

Оскільки дерево росте, то похідна dx/dt додатна і вираз $a - bx^2 > 0$ а, відповідно, $x^2 < a/b$. Тому рівняння можемо звести до вигляду: $-\frac{dx}{b(x^2 - a/b)} = dt$, інтегруючи його, отримаємо загальний розв'язок

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a/b} + x}{\sqrt{a/b} - x} = t + c$$

Враховуючи, початкову умову $x(t_0) = 0$, отримаємо, що $c = -t_0$.

Тоді розв'язок матиме такий вигляд

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a/b} + x}{\sqrt{a/b} - x} = t - t_0. \quad (2)$$

Розв'язавши рівняння (2) відносно x , одержуємо

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \quad (3)$$

Згідно з цією формулою, якщо при $t \rightarrow \infty$, то $x \rightarrow \sqrt{a/b} \rightarrow \text{const}$.

Таким чином, схематично графік росту дерева матиме вигляд S-кривої.

Модель 2. Ріст дерева відбувається завдяки засвоєнню певної кількості речовин із довкілля (грунту, атмосфери, гідросфери). Якщо всі ці потоки узагальнити в один з врахуванням обмеженості, то можемо отримати таке диференціальне рівняння ходу росту деревостанів:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{t} \cdot \left(\frac{\beta - x}{\beta} \right) \cdot x, \text{ або } -\frac{\beta dx}{x(x - \beta)} = \frac{\alpha dt}{t}, \quad (4)$$

де: x – запас деревини ($\text{м}^3/\text{га}$), t – вік, α – кінематичний коефіцієнт (безрозмірний), β – максимально можливий запас деревини ($\text{м}^3/\text{га}$).

Інтегруючи рівняння (4), отримаємо

$$x = \frac{\beta \cdot t^\alpha}{C + t^\alpha} \quad (5)$$

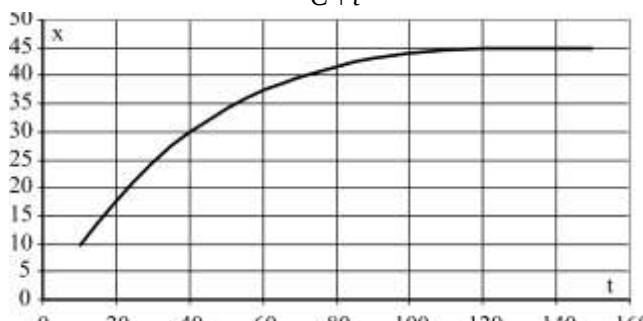


Рис. 1. Графік зміни росту запасу деревостанів, побудований за формулою (5) при $\alpha=1,5$, $\beta=790$, $C=800$

За формулою (5) можна моделювати ріст деревостанів у висоту і за діаметром. Залишаючи прийняті попередні позначення, отримаємо:

$$\text{ріст у висоту } h = \frac{\beta_1 \cdot t^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1} + C_1}; \quad (6)$$

$$\text{ріст за діаметром } d = \frac{\beta_2 \cdot t^{\alpha_2}}{t^{\alpha_2} + C_2}, \quad (7)$$

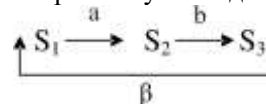
де: h – середня висота деревостану, м; α_1 і C_1 – безрозмірні параметри; β_1 – максимально можлива висота деревостану, м; d – середній діаметр дерева, см; α_2 і C_2 – безрозмірні параметри, β_2 – максимально можливий діаметр, см.

Модель 3. Диференціальна модель динаміки лісового фонду.

Побудова відповідної математичної моделі процесу розвитку рослинного покриву на великих територіях є досить громіздкою і може не бути адекватною дійсному процесу. У цих випадках множини типів рослинності ділять на підмножини укрупнених одиниць і вивчають їх взаємні зміни у часі. Прикладом такого процесу прогресивного розвитку рослинного покриву є класична сукцесія (зміна порід) після виконання рубань на ділянці, яка зайнята клімаксовим типом лісу (сосняк $\rightarrow$ зруб $\rightarrow$ трава і кущі $\rightarrow$ листяний ліс $\rightarrow$ сосняк). Припустимо, що існує n типів (станів) рослинного покриву, a_{ij} – інтенсивність переходу одиниці площі із i -го у j -ий стан і $a_{ij} = 1/\Delta t_{ij}$, де Δt_{ij} – час, необхідний для зміни i -го типу лісостану на j -ий; S_j – площа під j -им типом лісостану. Тоді матимемо таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dS_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ji} S_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} S_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Розглянемо простий випадок, коли $n=3$ і весь лісовий фонд класифіковано за трьома категоріями стану: зруб, листяний ліс і хвойні насадження. Їх взаємопереходи зобразимо у вигляді такої схеми:



де: a – інтенсивність заростання зрубу листяним лісом проміжної стадії сукцесії; b – інтенсивність зміни листяних порід хвойними; β – інтенсивність зрубів хвойних лісів.

У цьому випадку динаміку переходів площ із одного стану в інший опишемо такою системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = \beta \cdot S_3 - a \cdot S_1; \\ \frac{dS_2}{dt} = a \cdot S_1 - b \cdot S_2; \\ \frac{dS_3}{dt} = b \cdot S_2 - \beta \cdot S_3. \end{cases} \quad (9)$$

Крім цього, повинно виконуватися таке співвідношення балансу площ:

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i. \quad (10)$$

Задавши параметри a , b і β із системи рівнянь (9) та співвідношення балансу площ (10) можемо встановити розподіл площ лісового фонду за трьома

типами станів. При $dS_i/dt=0, i=1,3$ маємо стаціонарний розподіл площ лісового фонду, який ще називають фінальним. Із системи (9) і співвідношення (10) та умови стаціонарності розподілу знаходимо

$$\begin{cases} S_1^* = \frac{\beta \cdot b}{b \cdot \beta + a \cdot \beta + a \cdot b} S; \\ S_2^* = \frac{\beta \cdot a}{b \cdot \beta + a \cdot \beta + a \cdot b} S; \\ S_3^* = \frac{a \cdot b}{b \cdot \beta + a \cdot \beta + a \cdot b} S, \end{cases} \quad (11)$$

де: S_i^* – стаціонарна площа i -го типу лісостану. Кінетичні коефіцієнти моделі a, b, β , як бачимо, мають визначальне значення у математичній моделі динамі лісового фонду.

Для розглянутого прикладу за $a=0,03; b=0,04$ і $\beta=0,2$ отримаємо, що у граничному випадку площі розподіляться таким чином: площа під вирубування становитиме $\approx 52,6\%$ від площі всього лісового фонду, площа під листяні породи проміжної стадії сукцесії $\approx 39,5\%$, а під найбільш цінними хвойними породами $\approx 7,9\%$ всіх лісових площ. Величина кінетичного коефіцієнта визначає частку площі відповідного типу лісостану, який через рік переходять у наступну стадію, згідно з наведеною вище схемою. Наприклад, значення $\beta=0,2$ вказує на те, що за рік зрубують п'яту частину площі хвойних насаджень, тобто досить багато, отже, у фінальному розподілі площ лісового фонду частка хвойних порід є достатньо малою.

3.2. Диференційні моделі процесу природного руйнування деревостанів та їх відмирання у зонах антропогенних впливів

Побудуємо математичну модель для загального випадку. Будемо вважати, що A_i – загальна кількість дерев на певній ділянці лісу, A_j – кількість відмираючих дерев внаслідок природного процесу або дії негативних антропогенних впливів, Δ – різниця між загальною кількістю дерев та їх відмираючою кількістю.

Складемо балансове рівняння

$$\Delta = \sum_{i=1}^m A_i - \sum_{j=1}^k A_j. \quad (12)$$

Якщо величина $\Delta=0$, то маємо певний баланс дерев на ділянці лісу; якщо $\Delta>0$ кількість здорових деревостанів зростає, і навпаки, коли $\Delta<0$ – переважають відмираючі деревостани. Якщо такий процес нетривалий, то такий стан може бути стерпним, але коли з кожним роком показник Δ за абсолютною величиною зростає, то це є сигналом, що існує або значний вплив атмосферних забруднень на лісову екосистему, або з'явилися осередки шкідників, які руйнують деревостан на досліджуваній ділянці.

Для опису динаміки досліджуваного процесу скористаємось апаратом диференційних рівнянь. У цьому випадку крім складників A_i та A_j введемо

похідні цих величин, тобто $\frac{dA_i}{dt}$ і $\frac{dA_j}{dt}$, які вважатимемо швидкостями їх зміни під час врахування їх залежності від зовнішніх і внутрішніх чинників.

Введемо вектор $\vec{A} = [A_i, g = \overline{1, n}]$, де A_i – його компоненти, які відповідають величинам A_i та A_j , а через вектор $\vec{B} = [B_q, q = \overline{1, m}]$, де B_q – величини, що виражають вплив на швидкість зміни компонент вектора $\vec{A}$ дії зовнішніх чинників. Тоді отримаємо таку систему диференційних рівнянь:

$$\frac{dA_g}{dt} = f_g(\vec{A}, \vec{B}), g = \overline{1, n} \quad (13)$$

Оскільки нас цікавить величина Δ , то швидкість її зміни виразимо через похідну за часом від формули (12), а саме,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^m A_i - \sum_{j=m+1}^n A_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{dA_i}{dt} - \sum_{j=m+1}^n \frac{dA_j}{dt} = \sum_{i=1}^m f_i(\vec{A}, \vec{B}) - \sum_{j=m+1}^n f_j(\vec{A}, \vec{B}). \end{aligned} \quad (14)$$

Інтегруючи рівність (14) за заданого початкового значення $\Delta(0)$, отримаємо значення:

$$\Delta(t) = \Delta(0) + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m f_i(\vec{A}, \vec{B}) - \sum_{j=m+1}^n f_j(\vec{A}, \vec{B}) \right) dt. \quad (15)$$

Таким чином, якщо відома кожна з компонент вектора $\vec{A}$ у будь-який момент часу t , тобто всі значення функції $A(t)$, а також значення зовнішніх чинників $B_i(t)$ і вигляд функцій $f_i(\vec{A}, \vec{B})$, то, згідно з наведеною вище системи диференційних рівнянь (13), знаходимо такі розв'язки

$$A_i(t) = \varphi_i(\vec{B}, \vec{A}(0)).$$

Якщо розв'язок системи рівнянь не можливо отримати у замкнутому вигляді, тобто аналітично, то можна скористатися наближеними методами розв'язку – аналітичними (метод рядів або Пікара) або чисельними (Ейлера або Рунге-Кутта).

3.3. Диференційні моделі процесу природного руйнування деревостанів

Модель 1. Руйнування деревостанів внаслідок буревію. Побудуємо просту диференційну модель впливу буревію на ділянку лісу. Вітер, проходячи через ліс, зазнає опору дерев, внаслідок чого втрачає частину своєї швидкості. На дуже короткому проміжку шляху ця втрачена швидкість пропорційна швидкості на початку цього шляху і його довжині. Нехай на відстані x від початку лісу швидкість вітру становитиме V . Тоді, відповідно, втрачена швидкість на ділянці лісу (шляху) dx дорівнює – dV (процес спадання швидкості). Оскільки вважаємо, що втрачена швидкість пропорційна V та dx , то диференціальне рівняння цього явища запишемо у вигляді $-dV = kVdx$, де k певний безрозмірний коефіцієнт.

Інтегруючи це рівняння, отримаємо його загальний розв'язок: $V = Ce^{-kx}$. Вважаючи, що за початкових умов $x=0, V=V_0$, знаходимо $C = V_0$.

Таким чином, закон зміни швидкості вітру має такий вигляд: $V = V_0 \cdot e^{-kx}$.

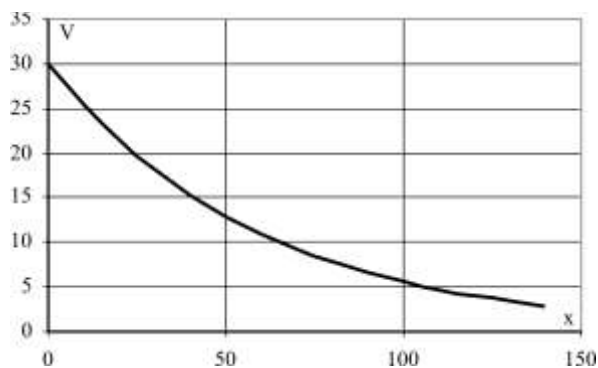


Рис. 2. Динаміка швидкості вітру при $V_0=30$ м/с і $V_1=29,5$ м/с

Коефіцієнта пропорційності k знайдемо з додаткової умови задачі. Нехай для $x=1$ м, швидкість вітру була V_1 , тоді $V_1 = V_0 \cdot e^{-k}$ або $k = \ln \frac{V_0}{V_1}$. Тоді зміни швидкості вітру матиме вигляд $V = V_0 \cdot e^{-kx}$.

Зміну швидкості вітру можна представити таким чином (рис. 2).

Модель 2. Розглянемо випадок природного відмирання дерев у вигляді лінійної моделі. Нехай на певній ділянці лісового масиву маємо $m(t)$ – середню кількість дерев у момент часу t і в станах A та B . До стану A зараховуємо дерева здорові, а до стану B – ослаблі та сильно ослаблі. Очевидно, швидкість зміни стану дерев $m(t)$ у часі можна задати диференціальним рівнянням $dm/dt = A - B$, або, якщо врахувати, що $A=am$ і $B=bm$, то $dm/dt = m(a-b)$, де a , b – коефіцієнти росту здорових та відмираючих дерев за одиницю часу відповідно.

Вважаючи, що у момент часу $t=t_0$, кількість здорових дерев $m=m_0$ знаходимо $m(t) = m_0 \cdot e^{(a-b)(t-t_0)}$.

Із цього розв'язку випливає, якщо $a > b$ і при $t \rightarrow \infty$, то кількість здорових дерев $m \rightarrow \infty$. Якщо ж $a < b$ і при $t \rightarrow \infty$ кількість здорових дерев $m \rightarrow 0$, тобто буде відмирати весь масив.

Тут наведено достатню просту модель, яка насправді дуже наближено відображає дійсність. Практично всі моделі, які описують реальні явища і процеси, є за своєю будовою нелінійними.

Модель 3. Нелінійна модель. Розглядуваний процес можна описати рівнянням $dm/dt = am - bm^2$, розв'язок якого $m(t) = \frac{m_0 \cdot a / b \cdot e^{a(t-t_0)}}{m_0 e^{a(t-t_0)} + (a/b - m_0)}$.

Згідно з цією моделлю, при $t \rightarrow \infty$, $m \rightarrow a/b$. Оскільки, виходячи з реальних умов $a > b$, то запропонована модель до певної міри може наближено відображати дійсну картину досліджуваного процесу.

Модель 4. Нехай кількісною мірою здорових деревостанів на деякій ділянці лісу у момент часу t є величина $x(t)$. За інтервал часу Δt зміна у лісовій екосистемі $x(t+\Delta t) - x(t)$ відбуватиметься під дією двох протилежних процесів – процесу розвитку лісової екосистеми і процесу природного відмирання її компонентів. Похідна величини $dx(t)/dt$ виражатиме швидкість зміни лісової екосистеми $x(t)$.

Введемо величину $E(t)$ – зовнішнє джерело, яке забезпечує нормальну життєдіяльність деревостанів.

Запишемо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} a_1 x(t) - a_2 x(t), & \text{якщо } x(t) \leq E(t); \\ a_1 E(t) - a_2 x(t), & \text{якщо } x(t) > E(t). \end{cases} \quad (16)$$

де a_1 та a_2 – деякі безрозмірні додатні коефіцієнти.

Запишемо розв'язок рівняння (16) для кожного випадку:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{(a_1 - a_2)t} & \text{якщо } x(t) \leq E(t); \\ x_0 e^{-a_2 t} + \int_0^t a_1 E(\tau) \cdot e^{-a_2(t-\tau)} d\tau & \text{якщо } x(t) > E(t). \end{cases} \quad (17)$$

У простому випадку, коли функція $E(t)$ є постійною, то розв'язок рівняння (16) матиме такий вигляд:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{(a_1 - a_2)t} & \text{якщо } x(t) \leq E; \\ x_0 e^{-a_2 t} + \frac{a_1 E}{a_2} (1 - e^{-a_2 t}) & \text{якщо } x(t) > E. \end{cases} \quad (18)$$

Проаналізуємо знак різниці $a_1 - a_2$. Якщо $a_1 < a_2$, то $a_1 - a_2 < 0$ і $a_1 E / a_2 < E$. У цьому випадку, якщо початкова кількість здорових дерев $x(0) = x_0$ була менша від E , то маємо перший розв'язок $x(t) = x_0 e^{(a_1 - a_2)t}$ і при $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$, тобто відбувається повне відмирання дерев протягом певного часу.

Якщо у початковому стані $x(0) = x_0$ і більше від E , то приймаємо друге значення розв'язку $x(t) = x_0 e^{-a_2 t} + a_1 E / a_2 (1 - e^{-a_2 t})$ і за умови $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow a_1 E / a_2$, тобто відбувається стабільний процес розвитку лісової екосистеми.

Якщо здійснити аналогічний аналіз при $a_1 > a_2$, тобто $a_1 - a_2 > 0$ і $a_1 E / a_2 > E$, то отримаємо результат при $t \rightarrow \infty$, то $x(t) \rightarrow a_1 E / a_2$.

Таким чином, величина $a_1 E / a_2$ відображає певний рівноважний стан лісової екосистеми.

3.4. Диференціальні моделі процесу відмирання деревостанів у зонах антропогенних впливів

Розглянемо один із видів антропогенних впливів на лісову екосистему у вигляді атмосферного забруднення – поширеного явища, що завдає значних екологічних, економічних, санітарно-гігієнічних та інших збитків. Очевидно, потрібно дослідити ці процеси з метою прогнозування наслідків їх впливів і відповідно розробити своєчасні природоохоронні заходи лісгосподарського або технологічного характеру.

Побудуємо математичну модель такої задачі. Нехай певна ділянка лісу (деревостану) перебуває під дією атмосферного забруднення. Внаслідок дії цього явища на лісову екосистему спостерігається різко виражений процес руйнування дерев. Якщо вважати, що маємо при цьому такі чотири категорії стану дерев: 1 – здорові, 2 – ослаблі, 3 – сильно ослаблі і 4 – відмираючі, то можна зобразити переходи особин із i -ої категорії в $i+1$ за такою схемою:

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4,$$

де α_i – інтенсивність переходу дерев із стану i у стан $i+1$ (розмірність 1/час).

Згідно з формулою (12), складемо балансове рівняння, яке характеризуватиме зміну кількості дерев відповідно до категорій стану. Вважаємо, що N – кількість дерев на ділянці лісу, що перебуває під дією атмосферного забруднення, $m_i(t)$ – середня кількість дерев, яка у момент часу t перебуває у стані i .

Оскільки $\sum_{i=1}^4 m_i(t) = N$, то побудуємо таку диференціальну модель у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dm_1}{dt} = -\alpha_1 m_1; \frac{dm_2}{dt} = \alpha_1 m_1 - \alpha_2 m_2; \\ \frac{dm_3}{dt} = \alpha_2 m_2 - \alpha_3 m_3; \frac{dm_4}{dt} = \alpha_3 m_3, \end{cases} \quad (19)$$

за таких початкових умов: у момент часу $t=0$,

$$m_1(0) = m_{10}, m_2(0) = m_{20}, m_3(0) = m_{30}, m_4(0) = m_{40}. \quad (20)$$

Інтегруючи кожне із рівнянь системи (19) за початкових умов (20), отримаємо такі розв'язки:

$$\begin{cases} m_1(t) = m_{10} e^{-\alpha_1 t}; \\ m_2(t) = \theta_0 m_{10} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) + m_{20} \cdot e^{-\alpha_2 t}; \\ m_3(t) = \alpha_2 \alpha_1 m_{10} \left(\frac{e^{-\alpha_1 t}}{\theta_1} - \frac{e^{-\alpha_2 t}}{\theta_2} + \frac{e^{-\alpha_3 t}}{\theta_3} \right) + \\ + m_{20} \theta_4 (e^{-\alpha_3 t} - e^{-\alpha_2 t}) + m_{30} \cdot e^{-\alpha_3 t}; \\ m_4(t) = N - \sum_{i=1}^3 m_i(t). \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{де: } \theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \alpha_1; \theta_1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (\alpha_3 - \alpha_1);$$

$$\theta_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2); \theta_3 = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1); \theta_4 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

Згідно з отриманими розв'язками, за наявності значень α_i можемо прогнозувати процес впливу атмосферного забруднення на досліджувану ділянку деревостану або навпаки – маючи початкові значення $m_i(0)$ і спостережувані значення $m_i(t)$ за певний проміжок часу на основі формул (21) можемо обчислити кінетичні коефіцієнти α_i , розв'язавши систему нелінійних (трансцендентних) рівнянь (21).

Висновок

Резюмуючи, можемо констатувати, що наведені диференціальні моделі є певними наближеними формулами, які дають змогу робити відповідний

аналіз і прогнозування життєвості лісових екосистем при певних впливах на них зовнішніх чинників – як природних, так і антропогенних.

За запропонованою моделлю динаміки лісового фонду можна обчислювати відчуження земельних площ під житлові, транспортні, промислові споруди і для потреб сільського господарства, а також прогнозувати наслідки цього процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алексеев А.С. Математические модели и методы в лесном хозяйстве : учебн. пособие. – Л. : Изд-во ЛТА, 1988. – 88 с.
2. Амелин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М. : Изд-во "Наука", 1987. – 160 с.
3. Никитин К.Е., Швиденко А.З. Методы и техника обработки лесоводственной информации. – М. : Лесн. пром-сть, 1978. – 270 с.
4. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М. : Изд-во "Наука", 1986. – 289 с.
5. Смит Дж. Модели в экологии. – М. : Изд-во "Мир", 1976. – 354 с.
6. Хильми Г.Ф. Теоретическая биогеофизика леса. – М. : Изд-во "Наука", 1957. – 156 с.
7. Хильми Г.Ф. Энергетика и продуктивность растительного покрова суши. – М. : Изд-во "Наука", 1976. – 89 с.
8. Шмидт В.М. Математические методы в ботанике. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1984. – 356 с.

O. I. Dumanskyj, Yu. M. Debryniuk

DIFFERENTIAL MODELS IN PROBLEMS OF FORESTRY

The application of the set of differential equations for the models construction in the relation to the problems of forestry in being examined. The models concerning trees growth, dynamics of forest lands and the process of natural destruction of trees and their destruction in the zones of anthropogenic influences can be used to forecast the vitality of tree plantations. The proposed model of the forest lands dynamics gives a possibility to calculate the disposal of lands and to make a prognosis of its consequences.

