

НОВІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 630.3.001.12/18

Н.І. БИБЛЮК¹, А.А. БОЙКО², Б.Т. ПЕРЕТЯТКО³

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА МОДЕЛЬ ПАКЕТА СТОВБУРІВ ЯК ОБ'ЄКТА ТРАНСПОРТУВАННЯ

Наведено підсумки аналітико-експериментального визначення фізико-механічних характеристик пакета стовбурів, методи математичного моделювання і розрахунку параметрів його вільних коливань.

1. Фізико-механічні характеристики пакета стовбурів

Густина та модулі пружності стовбурової деревини. Модулі пружності деревини стовбурів на згин і кручення формуються під впливом багатьох факторів, які не піддаються точному обліку й аналізу. Пряме їх визначення за методами деревинознавства (на чистих зразках малих розмірів) без урахування деформацій реального стовбура з властивими йому дефектами, вологістю, розмірами тощо може призвести до істотних похибок. Тому значення модулів пружності треба отримувати для реальних стовбурів без порушення їх цілісності.

Методика визначення модуля пружності стовбурової деревини на згин без порушення цілісності стовбура базується на вимірах кривини його прогину як балки змінного поперечного перерізу на двох шарнірних опорах, якими стовбур умовно поділено на прогінну та консольну частини [4]. Рівняння пружної лінії n -го елемента стовбура можна подати у такому вигляді:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x)J(x)}, \quad (1)$$

де: $d^2 z/dx^2$ – кривина прогину у перерізі x елемента стовбура; $M(x)$, $E(x)$ й $J(x) = \pi D^4(x)/64$ – згинальний момент, модуль пружності та момент інерції поперечного перерізу елемента стовбура під час прогину; $D(x)$ – діаметр поперечного перерізу стовбура.

Розв'язувати рівняння (1) доцільно кінцево-різницею методом, який дає змогу досить просто і точно вирішити поставлену задачу. Для трьох довільних точок пружної лінії, які розміщуються з інтервалом Δx уздовж стовбура (рис.1, а, б), рівняння прогинів z у кінцевих різницях можна подати у такому вигляді:

для прогінної частини

$$z_{n+1} = -z_{n-1} + 2z_n + \frac{\Delta x^2}{12} \left[\frac{M_{n-1}}{E_{n-1}J_{n-1}} + \frac{10M_n}{E_n J_n} + \frac{M_{n+1}}{E_{n+1}J_{n+1}} \right];$$

для консольної частини

$$z_{n+1} = z_{n-1} + 2\Delta x z_n + \frac{2\Delta x^2}{3} \left[\frac{M_{n-1}}{E_{n-1}J_{n-1}} + 2 \frac{M_n}{E_n J_n} \right]. \quad (2)$$

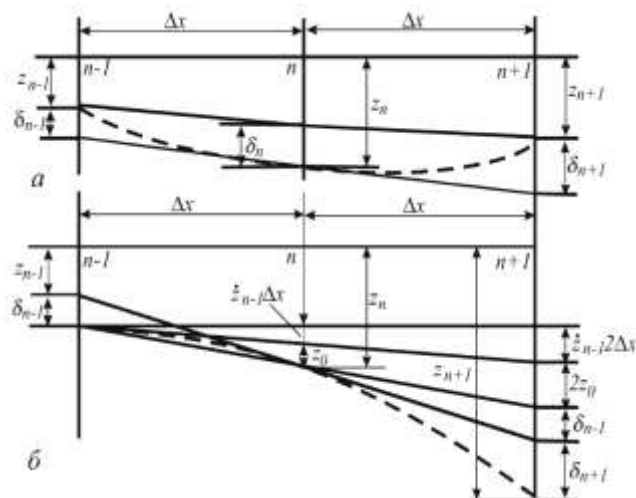


Рис.1. Схеми пружних переміщень ділянки стовбура довжиною Δx : а – прогин у прогінній частині, б – згин у консольній частині; суцільна лінія – вісь вимірювальної рейки, штрихова – крива згину стовбура

Беручи до уваги, що для прогінної частини (рис.1, а)

$z_{n-1} + z_{n+1} = 2(z_n - \delta_n)$, а $2\delta_n = \delta_{n-1} + \delta_{n+1}$, і, взявши модуль пружності на ділянці стовбура довжиною $2\Delta x$ постійним зі значенням E_n , після певних перетворень отримаємо вираз для визначення модуля пружності елемента стовбура

¹ Нестор Іванович БИБЛЮК – дійсний член ЛАН України, доктор технічних наук, професор, Національний лісотехнічний університет України. Україна, м. Львів. Тел.: +38(032) 233-96-69. E-mail: klmd@forest.lviv.ua

² Анатолій Антонович БОЙКО – інженер, Національний лісотехнічний університет України. Україна, м. Львів. Тел.: +38(032) 237-79-86. E-mail: klmd@forest.lviv.ua

³ Богдан Теодорович ПЕРЕТЯТКО – кандидат технічних наук, директор, ТзОВ "Мета". Україна, м. Львів. Тел.: +38(0322) 63-39-98. E-mail: metameta@ukr.net

$$E_n = \frac{\Delta x^2}{12(\delta_{n-1} + \delta_{n+1})} \left[\frac{M_{n-1}}{J_{n-1}} + \frac{10M_n}{J_n} + \frac{M_{n+1}}{J_{n+1}} \right], \quad (3)$$

де δ_{n-1} і δ_{n+1} – зміщення перерізів $n-1$ і $n+1$ елемента стовбура відносно перерізу n .

Для консольної частини стовбура (рис.1, б) можна записати

$$z_n = z_{n-1} + \Delta x \dot{z}_{n-1} + z_0$$

та $z_{n+1} = z_{n-1} + 2\Delta x \dot{z}_{n-1} + 2z_0 + \delta_{n-1} + \delta_{n+1}$,

де $\dot{z}_{n-1}$ – тангенс кута нахилу дотичної до зігнутої осі елемента стовбура у перерізі $n-1$.

Подавши рівняння для z_n у вигляді:

$$z_n = z_{n-1} + \Delta x \dot{z}_{n-1} + \frac{\Delta x^2}{6} \left[\frac{M_{n-1}}{E_{n-1}J_{n-1}} + \frac{2M_{n-0.5}}{E_{n-0.5}J_{n-0.5}} \right], \quad (4)$$

і, розв'язавши спільно рівняння (2) і (4), отримаємо вираз для визначення модуля пружності елемента стовбура у консольній частині:

$$E_n = \frac{\Delta x^2}{3(\delta_{n-1} + \delta_{n+1})} \left[\frac{M_{n-1}}{J_{n-1}} + 4 \frac{M_n}{J_n} - 2 \frac{M_{n-0.5}}{J_{n-0.5}} \right]. \quad (5)$$

За незначної зміни відношення M/J на ділянці $2\Delta x$, що часто трапляється, розрахункові вирази (3) і (5) після перетворень можна записати таким чином:

$$E_n = \frac{\Delta x^2 M_n}{(\delta_{n-1} + \delta_{n+1}) J_n}. \quad (6)$$

Похибка формули (6) залежить від збігу стовбурів і збільшується до вершини. Коли збіг становить до 5см на 1м довжини стовбура, то відносна похибка обчислення модуля пружності не перевищує 6...7%.

Метод визначення модуля пружності деревини стовбура на кручення розробляють на підставі припущення, що модулі пружності в радіальній і тангентальній площинах відрізняються мало, і деревину стовбурів можна подати як поперечно-ізотропний матеріал [9].

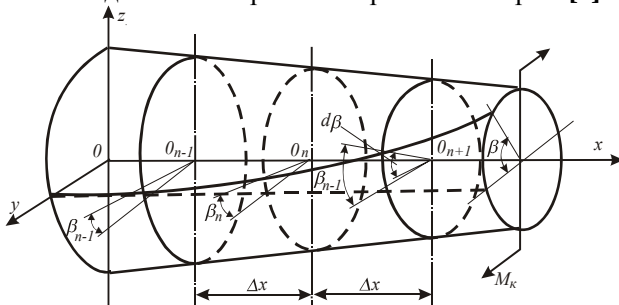


Рис.2. Схема пружних переміщень ділянки стовбура $2\Delta x$ під час кручення

Розглядаючи стовбур як брус змінного поперечного перерізу, жорстко закріплений одним кінцем і навантаженого крутним моментом M_k (рис.2), та припускаючи, що переміщення перерізу стовбура малі і для нього справедливий принцип незалежності дії сил і гіпотеза плоских перерізів, запишемо рівняння пружних переміщень n -го елемента стовбура на кручення у такому вигляді:

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{M_k}{G(x)J_p(x)}, \quad (7)$$

де $G(x)$ й $J_p(x) = \pi D^4(x)/32$ – модуль пружності та момент інерції поперечного перерізу елемента стовбура під час кручення.

Кут відносного зміщення двох крайніх перерізів елемента стовбура, розміщених з інтервалом $2\Delta x$ вздовж нього, відповідно до формули Сімпсона, подамо у такому вигляді:

$$\beta_{n+1} - \beta_{n-1} = \frac{M_k \Delta x}{3} \left[\frac{1}{G_{n-1}J_{p(n-1)}} + \frac{4}{G_n J_{pn}} + \frac{1}{G_{n+1}J_{p(n+1)}} \right]. \quad (8)$$

Припустивши, що на ділянці $2\Delta x$ модуль пружності $G(x)$ змінюється незначно, з рівняння (8) отримаємо вираз для обчислення модуля пружності n -го перерізу стовбура під час кручення:

$$G_n = \frac{M_k \Delta x}{3(\beta_{n+1} - \beta_{n-1})} \left[\frac{1}{J_{p(n-1)}} + \frac{4}{J_{pn}} + \frac{1}{J_{p(n+1)}} \right]. \quad (9)$$

Таким чином, вимірявши зміщення δ й β у перерізах $n-1$ та $n+1$ визначивши M , J й J_p у перерізах $n-1$, n й $n+1$, можна отримати деякі усереднені для інтервалу $2\Delta x$ значення модулів пружності E і G стовбура без порушення його цілісності. Задовільна точність апроксимації рівнянь (1) і (7) буде забезпечена, якщо крок інтегрування Δx не перевищує 10% довжини стовбура. З використанням викладеного підходу виконано виміри модулів пружності деревини стовбура смереки на стенді, який описано нижче.

Закономірність зміни густини і модулів пружності вздовж стовбурів завдовжки 24-26м і діаметром на висоті грудей 24-32см, зрубаних у чистому смерековому деревостані 1а класу бонітету III класу віку, встановлено за допомогою чисел Чебишева у вигляді кореляційних рівнянь:

$$\begin{aligned} \rho(x/L) &= \rho_{сеп}(0,887 + 0,223 \cdot x/L); \\ E(x/L) &= E_{сеп}(1,127 - 0,248 \cdot x/L); \\ G(x/L) &= G_{сеп}(1,118 - 0,241 \cdot x/L); \\ \mu(x/L) &= E/G = \mu_{сеп} = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

Середні значення густини $\rho_{сеп} = 728 \text{ кг/м}^3$, середня похибка кореляційного рівняння – 0,8%, модулів пружності на згин $E_{сеп} = 12,1 \text{ ГПа}$ (2,1%) і кручення $G_{сеп} = 367,7 \text{ МПа}$ (1,1%), $\mu_{сеп} = 27,2$ (1,7%).

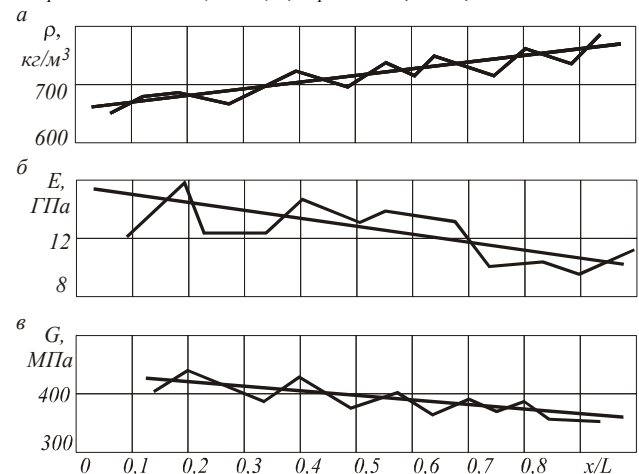


Рис.3. Зміна густини (а) та модулів пружності на згин (б) і кручення (в) уздовж стовбура

Як бачимо з наведених даних (рис.3), зміна характеристик уздовж стовбура досить істотна. Наприклад, зі зміною відносної довжини x/L стовбура від 0,1 до 0,9 густина деревини збільшується на 136 кг/м^3 або на 20% від середнього значення (для деяких стовбурів на 40%), зменшуються модуль пружності на згин на

3,2ГПа (24%) та модуль пружності на кручення – на 90МПа (22%). Середнє значення модуля пружності деревини свіжозрубаних стовбурів відрізняється від рекомендованого у деревинознавстві у 1,2-1,5раза.

Для тонких стовбурів смереки, заготовлюваних під час доглядового рубання, довжиною 11-13м і діаметром на висоті грудей 11-12см, 1класу віку

$$\rho(x/L) = \rho_{сер}(0,97 + 0,07 \cdot x/L);$$

$$E(x/L) = E_{сер}(1,58 - 1,53 \cdot x/L). \quad (11)$$

Середнє значення густини деревини тонких стовбурів на 7% більше, а модуля на згин на 22% менше, ніж для великих стовбурів. Зміна густини деревини вздовж тонких стовбурів у 4рази менша, а модуля пружності на згин у бразів більша, ніж для великих, що свідчить про істотну різницю між характеристиками стовбурів різних класів віку.

Коефіцієнти жорсткості пакета стовбурів. Пакет стовбурів відрізняється від багатоярусної балки без зв'язків передусім тим, що несе навантаження тільки власної ваги. Крім цього, між окремими стовбурами під час їх згинання виникають значні сили тертя, оскільки стовбури мають нерівну поверхню і як правило перевозяться з корою.

Складні балки без зв'язків створюють значно менший опір поперечному згинуві через відсутність зсувів по поверхнях дотику окремих балок. Нарешті, стовбури, навантажені на рухомий склад, мають непостійний переріз і тому гнучкіші, ніж балки постійного поперечного перерізу.

Професор Б.Гастев [10] свого часу запропонував виражати момент інерції поперечного перерізу пакета стовбурів за допомогою коефіцієнта жорсткості ψ через момент інерції поперечного перерізу того ж самого, але монолітного пакета стовбурів, тобто такого, що має абсолютно жорсткі зв'язки і працює як єдине ціле. Беручи до уваги, що моменти інерції поперечного перерізу обернено пропорційні прогинам, можна записати

$$\frac{J_I}{J_I} = \frac{f_I}{f_I},$$

звідки $J_{II} = J_M(f_M/f_I) = \psi J_M$, де J_{II} – дійсний момент інерції поперечного перерізу пакета стовбурів, см⁴;

$J_{II} = \sum_{i=1}^m (J_i + a^2 S_i)$ – момент інерції поперечного перерізу монолітного пакета стовбурів, см⁴ (для жорстких зв'язків); $J_i = \pi d^4 / 64$ – екваторіальний момент інерції поперечного перерізу i -го стовбура, см⁴ (за відсутності зв'язків і тертя); n – кількість стовбурів; a – відстань від центра ваги перерізу стовбура до нейтральної осі пакета, см; $S_i = \pi d^2 / 4$ – площа поперечного перерізу i -го стовбура, см²; d – діаметр стовбура, см; f_{II} – дійсний максимальний прогин пакета стовбурів, см; f_M – максимальний прогин монолітного пакета стовбурів, см.

Дійсний момент інерції прямокутного поперечного перерізу пакета стовбурів можна визначити також за формулами, запропонованими З.Цофіним для пакета стовбурів, укладених відземками:

в різні боки

$$J_I = \psi \frac{V_I^3}{4,3L^3b^2}; \quad (11)$$

в один бік

$$J_I = \psi \frac{(q_0 - kx)^3}{4,3b^3\gamma^3}, \quad (12)$$

де b – ширина пакета стовбурів.

Проведені Б.Гастевим експериментальні дослідження коефіцієнта жорсткості пакета стовбурів дали змогу встановити головні фактори, які впливають на його величину, і отримати простий математичний вираз для його визначення:

$$\psi = 0,5832 \cdot r - 2,019, \quad (13)$$

де r – кількість рядів у пакеті стовбурів.

Як бачимо з наведеної формули, значення коефіцієнта ψ зменшується зі збільшенням кількості рядів у пакеті стовбурів. Коефіцієнт ψ у разі збільшення кількості рядів від 3 до 7 зменшується з 0,06 до 0,01.

Коефіцієнт жорсткості поперечного перерізу стовбурів пакета ψ можна трактувати як суму двох складників. Перший складник є відношенням суми екваторіальних моментів інерції окремих стовбурів у пакеті J_i до моменту інерції пакета як моноліту J_M , друга – визначається силами тертя між стовбурами. З.Цофін з'ясував, що сили тертя між стовбурами збільшують момент інерції деревини приблизно на третину, що дало змогу йому вивести таку формулу для визначення дійсного моменту інерції пакета стовбурів:

$$J_I = (1,29 \div 1,36) \sum_{i=1}^m J_i.$$

Тут екваторіальні моменти інерції стовбурів J_i відповідають тому перерізові, для якого розраховується дійсний момент інерції пакета J_{II} . Наведену формулу можна використовувати для визначення моменту інерції пакета з будь-якою формою поперечного перерізу.

У виразі формули (12) значення коефіцієнта ψ відповідає його усередненому значенню вздовж пакета. Ми запропонуємо методику визначення коефіцієнтів жорсткості пакета деревини як для згину, так і для кручення з урахуванням зміни цих коефіцієнтів уздовж пакета.

В основу запропонованого методу визначення коефіцієнтів жорсткості пакета покладено уявлення про пакет стовбурів як балку змінного поперечного перерізу, для якої рівняння пружних переміщень n -го перерізу пакета можна подати у такому вигляді:

для згину

$$\frac{d^2 x}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x) J_I(x) \psi(x)}; \quad (13)$$

для кручення

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} = \frac{M(x)}{G(x) J_{pII}(x) \psi_K(x)}, \quad (14)$$

де $\psi(x)$ і $\psi_K(x)$ – коефіцієнти жорсткості для згину і кручення, змінні вздовж елемента пакета стовбурів:

$$J_{II} = \sum_{i=1}^m J_i(x), \quad J_{pII} = \sum_{i=1}^m J_{pi}(x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Добутки величин $E(x)$ $J_{II}(x)$ $\psi(x)$ і $G(x)$ $J_{pII}(x)$ $\psi_K(x)$ називають жорсткістю поперечного перерізу пакета стовбурів з абсцисою x відповідно для згину і кручення.

Тут під коефіцієнтом жорсткості розуміємо відношення дійсного моменту інерції поперечного перерізу пакета стовбурів до суми екваторіальних моментів інерції окремих стовбурів у пакеті. Момент інерції будь-якого перерізу вздовж стовбура можна знайти через момент інерції перерізу на висоті грудей J_m за емпіричною формулою, отриманою Б.Гастевим (для стовбурів хвойних порід в інтервалі $d_m = 20-50$ см):

$$J_i(x) = (4,38 \cdot x^{0,1} - 3,24) \cdot J_m.$$

Припустивши, що M , E , G , ψ і ψ_k стали на ділянці пакета стовбурів довжиною $2\Delta x$, і застосувавши для розв'язання рівнянь (13) і (14) кінцево-різницький метод, після певних перетворень (аналогічних виведенню залежності для модулів пружності E_n і G_n) отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів жорсткості n -го перерізу пакета стовбурів:

для згину

$$\psi_n = \frac{\Delta x^2 M_n}{(\delta_{n-1} + \delta_{n+1}) E_n J_{in}}; \quad (15)$$

для кручення

$$\psi_{kn} = \frac{M_k \Delta x}{3(\beta_{n+1} - \beta_{n-1}) G_n \left[\frac{1}{J_{pI(n-1)}} + \frac{4}{J_{pI_n}} + \frac{1}{J_{pI(n+1)}} \right]}. \quad (16)$$

Розрахунок коефіцієнтів жорсткості $\psi(x)$ і $\psi_k(x)$ пакета стовбурів з використанням рівнянь (15) і (16) зводиться, за відомих E_n , G_n , J_{pI_n} і $J_{pI_{n+1}}$, до експериментального визначення кривини пружної лінії осі пакета стовбурів під час згину і кутових зміщень площин елемента пакета під час кручення. Як бачимо з кривих, зображених на рис.4, а, б, коефіцієнт жорсткості значно змінюється вздовж пакета, зростаючи до найбільшого значення над проміжною опорою і наближаючись до одиниці у верхній частині.

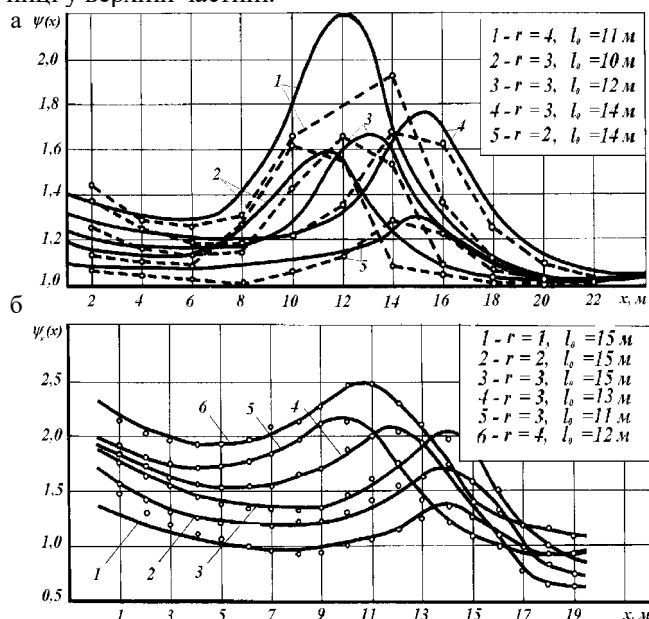


Рис.4. Залежності коефіцієнтів жорсткості під час згинання (а) і кручення (б) від довжини пакета стовбурів: $\circ$ – усереднені експериментальні значення; - - - - - апроксимувальні криві

Отримані значення коефіцієнта жорсткості залежно від відносної довжини пакета x/L , кількості рядів r і відстані від відземкової площини до проміжної опори $R=l_0+1$ апроксимовано виразами вигляду:

для згину

$$\psi(x) = 1 + (\psi_{\text{до}} - 1) \times \left\{ 1 + \frac{x}{L} + (5.75 - 0.17R - 0.3r) \exp(-0.122(x - R)^2) \right\}; \quad (17)$$

для кручення

$$\psi_k(x) = \psi_{k\text{сер}} \left\{ 1 - 0.5 \frac{x}{L} + z_1 \times \exp \left(z_2 (R - x)^2 \left(x^2 \left(1 - \frac{c}{R} \right) + (x - 1) \frac{L}{R} \right) \right) \right\}; \quad (18)$$

$$z_1 = \left(0.5 - 0.00273r + 0.104 \frac{R}{L} + 0.076 \frac{Rr}{L} \right);$$

$$z_2 = 0.0038 \frac{R}{L} - 0.0034;$$

де $\psi_{\text{сер}}$ і $\psi_{k\text{сер}}$ – усереднені за довжиною значення коефіцієнтів жорсткості пакета стовбурів для згину і кручення; c – відстань від відземкової площини до центра ваги пакета.

Середня (максимальна) похибка формул становить відповідно 3 (13) і 5 (18) відсотків.

Динамічні характеристики пакета стовбурів.

Середні значення модулів пружності деревини на згин і кручення можна визначити за допомогою запропонованого Б.Біликом і Б.Перетятком аналітико-експериментального методу, який базується на розрахункові однієї з низьких (наприклад, головної) частот пакета стовбурів. У рівняння частот (35) і (37) підставляють приблизні значення модулів пружності E_p та G_p і визначають значення головних частот ω_p , що не відповідають дійсності. Оскільки квадрати власних частот коливань пакета прямо пропорційні величині модулів пружності, то шукані значення останніх можна встановити за визначеними експериментальним шляхом дійсними значеннями власних частот ω на підставі формули:

$$E_{\text{сер}}(G_{\text{сер}}) = E_p(G_p) \omega^2 / \omega_p^2.$$

Цей метод визначення середніх значень модулів пружності, порівняно зі статичним, відрізняється меншою трудомісткістю вимірів і більшою точністю.

Усереднені значення коефіцієнта жорсткості пакета стовбурів, що входять у вирази (17) і (18), можна визначити через частоти головних коливань пакета та окремих стовбурів [7]. Залежність для визначення коефіцієнта жорсткості отримаємо, виходячи з таких передумов. Припустивши, що вплив пружного опору у пакеті на його частоти коливань неістотний, подамо диференційні рівняння вільних коливань пакета під час згинання і кручення у такому вигляді:

$$E(x)J(x)\psi(x) \frac{d^4 z}{dx^2} - m(x) \frac{d^2 z}{dt^2} = 0; \quad (19)$$

$$G(x)J_p(x)\psi_k(x) \frac{d^2 \beta}{dx^2} - m(x)(\rho_x^2 + h_x^2) \frac{d^2 \beta}{dt^2} = 0, \quad (20)$$

де $m(x)$ – маса деревини в поперечному перерізі пакета стовбурів з абсцисою x ; $m(x) = S(x)\rho(x)$; $S(x)$ – площа поперечного перерізу пакета стовбурів з абсцисою x ; $\rho(x)$ – густина поперечного перерізу пакета з абсцисою x ; ρ_x – радіус інерції перерізу пакета з абсцисою x ; h_x – відстань від осі пакета до осі крену у перерізі з абсцисою x .

Площа поперечного перерізу пакета стовбурів з абсцисою x визначається за такою формулою:

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\pi d^2(x)}{4},$$

де m – кількість стовбурів у пакеті.

Візьмемо розв'язки рівнянь (19) і (20) такими:

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \Phi_k(t); \quad \beta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(t).$$

Взявши до уваги, що $\Phi_k(t) = \omega_k^2 \Phi_k(t)$, після підставлення взятих рішень у вихідні рівняння (19) і (20) і скорочення однойменних доданків, отримаємо рівняння k -ої головної форми:

для згину

$$E(x)J(x)\psi(x) \frac{d^4 z}{dx^2} - m(x) z_k \omega_k^2 = 0; \quad (21)$$

для кручення

$$G(x)J_p(x)\psi_e(x) \frac{d^4 \beta}{dx^2} - m(x)(\rho_x^2 + h_x^2) \beta_e \omega_e^2 = 0, \quad (22)$$

де ω_k – власна частота, яка відповідає k -й головній формі коливань пакета.

Взявши жорсткість для згину та кручення і масу пакета стовбурів сталими вздовж елемента пакета зі значеннями відповідно $EJ\psi$, $GJ_p\psi_k$ і m_x , внаслідок розв'язання рівнянь (21) і (22) отримаємо:

для згину

$$\omega^2 = \frac{EJ\psi z_k^{IV}}{m_x z_k}; \quad (23)$$

для кручення

$$\omega_k^2 = \frac{EJ\psi_k \beta_k^{II}}{m_x(\rho_x^2 + h_x^2) \beta_k}. \quad (24)$$

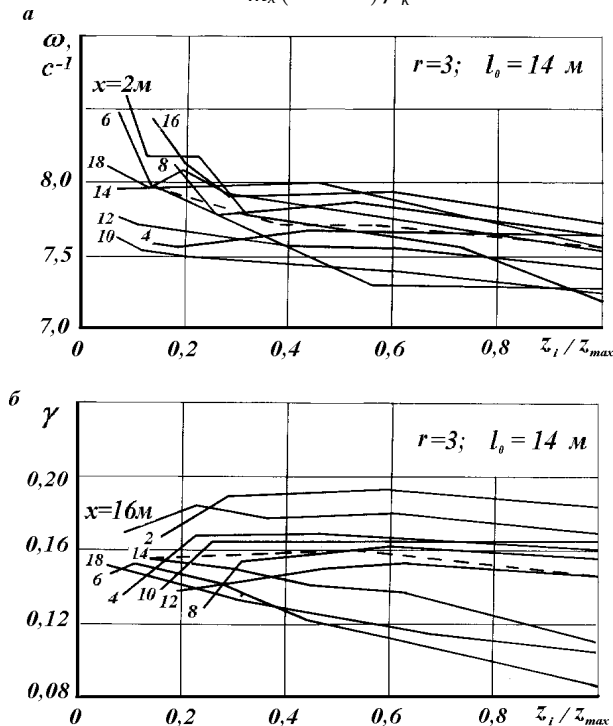


Рис.5. Залежність головної частоти (а) і коефіцієнта непружного опору (б) пакета стовбурів від відношення z_i/z_{max} для різних перерізів пакета x (--- усереднені криві)

Якщо зібрати пакет з однакових стовбурів, то за припущення, що відношення амплітуд (форм) i -го стовбура і пакета збігаються, отримаємо таке рівняння для визначення середніх значень коефіцієнтів жорсткості:

$$\psi_{\tilde{n}\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}(\psi_{\tilde{n}\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}) = \frac{\omega_k^2}{\omega_{ki}^2} \quad (25)$$

Коефіцієнт непружного опору пакета стовбурів визначається через відношення амплітуд коливань на початку та у кінці k -го циклу за загальноприйнятою формулою

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \ln \frac{z_k}{z_{k-1}}.$$

Аналізуючи залежності параметрів вільних коливань від відносної амплітуди z_k/z_{max} для різних перерізів пакета, кількості рядів і відстаней між кониками (рис.5), бачимо, що власні частоти та коефіцієнти непружного опору пакета неістотно змінюються зі зміною амплітуди коливань, що дає змогу користуватися у розрахунку коливань лісотransпортних систем середньоарифметичними значеннями коефіцієнтів жорсткості та непружного опору пакета стовбурів.

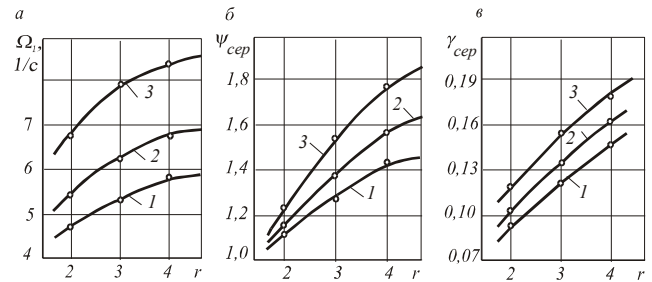


Рис.6. Залежність головної частоти (а), коефіцієнтів жорсткості (б) і непружного опору (в) пакета стовбурів від кількості рядів у пакеті для різних відстаней між кониками: 1 – $l_0=10m$; 2 – $l_0=12m$; 3 – $l_0=14m$ (○ – експериментальні точки)

Отримані нами значення головної частоти, коефіцієнтів жорсткості та непружного опору у функції кількості рядів пакета стовбурів для різних відстаней між кониками (рис.6) з достатньою точністю апроксимовано виразами такого вигляду:

для згину

$$\omega = 8,34 - 1,4l_0 + 1,17r + 0,076l_0^2 - 0,21r^2 + 0,06l_0r;$$

$$\psi_{sep} = 1,702 - 0,1983l_0 + 0,159r + 0,00625l_0^2 - 0,0573r^2 + 0,0339l_0r;$$

$$\gamma = 0,2363 - 0,03917l_0 + 0,03388r + 0,001681l_0^2 - 0,004025r^2 + 0,001663l_0r; \quad (26)$$

для кручення

$$\psi_{ksep} = 0,878 + 0,277r - 0,0017R - 0,0033Rr;$$

$$\gamma_k = 0,3860 - 0,0209l_0 + 0,0165r - 0,2224lg\theta + 0,0134l_0lg\theta, \quad (27)$$

де $\theta = (\beta_{c2} - \beta_{c1})/l_0$ – відносний кут закручування пакета; β_{c2} і β_{c1} – кути повороту перерізів пакета над рухомою і нерухомою опорами.

Середня (максимальна) похибка формул (26) і (27) становить відповідно 3 (7) і 5 (13) відсотків.

Експериментальне визначення деформацій і параметрів коливань стовбурів. Спеціальний експериментальний стенд, призначений для визначення параметрів як окремих стовбурів, так і пакетів з них, було створено на кафедрі транспорту лісу ЛЛІТІ (рис.7). Його виконано у вигляді двох масивних опор (нерухомої 1 і рухомої 2) з установленими на них кониками.

На конику нерухомої опори 1 розміщено вал, який, обертаючись довкола своєї осі, забезпечує вільне позадвжнє переміщення відземкової частини стовбура (пакета) під час згинання. Як рухому опору використано

двоівсний розпуск зі знятими колесами, який за допомогою ручної лебідки може переміщатися по рейках. Стовбур (пакет) згинається натяжним пристроєм (рис.7, а), який складається з лебідки 4 та поліспасти 5. Прикладене зусилля реєструється динамометром розтягу 6. Натяжний пристрій розміщується на відстані до 2 м від вимірювального пристрою для зменшення впливу поперечної сили на згин елемента стовбура.

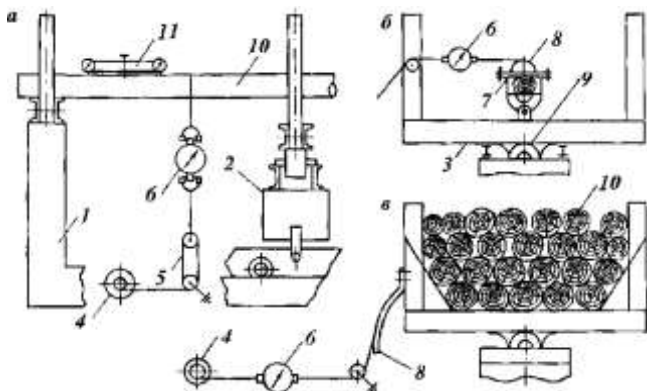


Рис.7. Будова експериментального стану для визначення характеристик деревних стовбурів і пакетів

Для закручування (рис.7, б, в) стовбур (пакет) закріплюється на опорах спеціальними затискачами (кониками). Затискач на нерухомій опорі утримує стовбур (пакет) від повертання у вертикальній поперечній площині та забезпечує його вільне кутове переміщення в горизонтальній площині. Затискач 7 (коник 3), що закріплює стовбур (пакет) на рухомій опорі, забезпечує його вільне повертання у вертикальній поперечній площині навколо составу 9. Закручування стовбура (пакета) здійснюється ручною лебідкою через поліспаст і важіль спеціального профілю 8, який забезпечує постійну величину крутного моменту для різних кутів повороту затискача (коника). Зусилля, що створює момент закручування, прикладається у площині проміжної опори і реєструється динамометром розтягу 6.

Кривина пружної лінії стовбура вимірюється за допомогою спеціальної рейки II завдовжки 1 м з закріпленими на її кінцях індикаторами годинникового типу. Для вимірювання кривини пружної лінії рейка своєю середньою частиною жорстко кріпиться до стовбура в точці, яка відповідає перерізу n , а індикатори своїми рухомими штифтами спираються на стовбур у точках, що відповідають перерізам $n-1$ і $n+1$.

Кривину пружної лінії осі пакета можна визначити як середнє арифметичне з вимірюваних значень кривини пружної лінії стовбурів, які розміщені у крайньому лівому та правому рядах пакета посередині його висоти. Кутові зміщення площин пакета встановлюють за кутовими зміщеннями стовбура, розміщеного посередині нижнього ряду.

Кутові зміщення перерізів елемента стовбура вимірюються за допомогою спеціальних кутомірів з ціною поділки 10. Діаметри поперечних перерізів визначаються за периметром стовбура, який вимірюється гнучкою стрічкою.

Вільні коливання збуджуються шляхом виведення стовбура (пакета) з положення рівноваги ручною лебідкою та відпусканням його через розрив спеціально виготовлених кілець. Кільця закріплюються через кожні 2 м вздовж стовбура.

Головні (вимушені) коливання пакета збуджуються його розгойдуванням за вершини стовбурів. Розгойдування припиняється у разі виникнення усталених резонансних коливань пакета, що відповідають першій (головній) власній частоті коливальної системи. Після зняття зовнішньої дії пакет здійснює вільні коливання з головною частотою.

Параметри коливань вимірюються за допомогою давачів відносних переміщень, розміщених уздовж стовбура (пакета) через кожні 2 м з метою встановлення характеру зміни кривих вільних коливань уздовж стовбура. Крім давачів відносних переміщень, у найхарактерніших точках уздовж стовбура (пакета) встановлюються акселерометри і давачі кутових швидкостей для виявлення високочастотних складників вільних коливань. Запис вимірюваних параметрів ведеться на світлочутливих стрічках шлейфових осцилографів або магнітних носіях з подальшим машинним опрацюванням вислідів.

2. Алгоритмічний метод розрахунку коливань пакета стовбурів

Розрахункова схема і рівняння просторових коливань пакета. Для розрахунку коливань окремих стовбурів і пакетів деревини змінного перерізу доцільно подати їх у вигляді ступінчастого стержня [2], розподілена маса і жорсткість якого змінюються стрибком на переходах від однієї ділянки до іншої (рис.8, а).

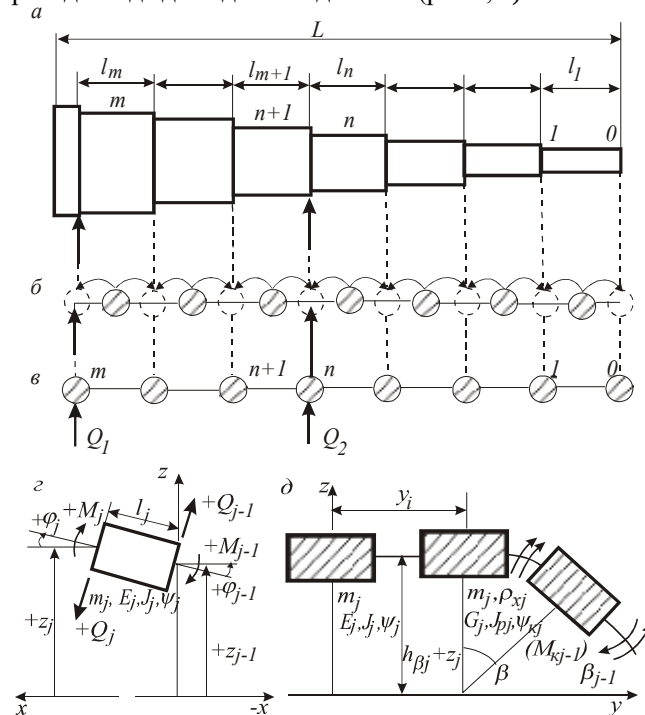


Рис.8. Розрахункові схеми пакета стовбурів: а – у вигляді ступінчастого стрижня, б і в – зі зосередженими масами, г – напрям силових і геометричних величин для j -ї ділянки стрижня під час згинання, д – те ж саме під час кручення

Розглянемо коливання ділянки стрижня постійного перерізу з рівномірно розподіленою масою, припускаючи, що:

у недеформованому стані пружна вісь стрижня прямолінійна і збігається з лінією центрів ваги його поперечних перерізів;

відхилення точок осі стрижня під час коливань відбуваються в одній площині та є "малими", а відповідні сили, що виникають, залишаються в межах пропорційності;

довжина стрижня значно перевищує поперечні розміри і можна знехтувати впливом перерізуювальної сили та інерції кручення розподіленої маси;

сила непружного опору пропорційна до пружної відновлювальної сили і зміщена за фазою від неї на кут $\pi/2$ (гіпотеза Є. Сорокіна);

напрями силових і геометричних величин відповідають поданим на рис.8, з, д.

За таких допущень диференціальні рівняння вільних коливань ділянки стрижня мають такий вигляд:

лінійні коливання у вертикальній поздовжній площині

$$E_j J_{\psi j} (1 + i\gamma_j) \frac{d^4 z}{dx^4} + m_{xj} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0; \quad (28)$$

лінійні коливання у горизонтальній площині

$$E_j J_{\psi' j} (1 + i\gamma' j) \frac{d^4 y}{dx^4} + m_{xj} \frac{d^2 (y(h\beta_j + z)\beta)}{dt^2} = 0; \quad (29)$$

кутові коливання у вертикальній поперечній площині

$$G_j J_{\psi j} (1 + i\gamma_k) \frac{d^2 \beta}{dx^2} - m_{xj} \rho_{xj}^2 \frac{d^2 \beta}{dt^2} - m_{xj} (h\beta_j + z) \frac{d^2 (y(h\beta_j + z)\beta)}{dt^2} = 0 \quad (30)$$

де: z і y – лінійні переміщення певної точки осі стрижня з абсцисою x у вертикальній поздовжній і горизонтальній площинах; β – кутове переміщення певного перерізу стрижня з абсцисою x у вертикальній поперечній площині; E_j і G_j – модулі пружності j -ої ділянки стрижня для згину та кручення; J_j і $J_{\psi j}$ – моменти інерції поперечного перерізу j -ої ділянки стрижня для згину та кручення; m_{xj} – маса одиниці довжини j -ої ділянки стрижня; $m_{xj} = S_j \rho_j$; ρ_j – густина деревини j -ої ділянки стрижня; ρ_{xj} – радіус інерції j -го перерізу відносно осі x ; h_{xj} – відстань від осі j -ої ділянки до осі крену; $\psi_j(\psi_{\psi j})$ і ψ_{kj} – коефіцієнти жорсткості j -ої ділянки стрижня для згину у вертикальній (горизонтальній) площині та кручення; $\gamma_j(\gamma_{\psi j})$ і γ_{kj} – коефіцієнти непружного опору j -ої ділянки стрижня для згину у вертикальній (горизонтальній) площині та кручення.

Коливання транспортного засобу в горизонтальній площині, яке вивчають з метою оцінювання його стійкості та керованості, здебільшого розглядають у русі по рівній опорній поверхні, для якої кутових коливань, зумовлених впливом поперечного мікропрофілю, нема. А кутові коливання у вертикальній поперечній площині, що формують навантажувальні режими ходової частини транспортних ланок, розглядають, звичайно, окремо від лінійних коливань у горизонтальній і вертикальній поздовжній площинах. У цьому випадку рівняння (28) і (29), які описують лінійні вертикальні та горизонтальні коливання ділянки стрижня (пакета), ідентичні та відрізняються тільки значеннями коефіцієнтів ψ і γ , а рівняння (30) і (31), які описують лінійні горизонтальні та кутові поперечні коливання ділянки стрижня, стають незв'язаними між собою. Тому надалі вважатимемо, що всі розв'язки, отримані під час вивчення коливань пакета у вертикальній поздовжній площині, так само стосуються і його коливань у горизонтальній площині.

Перетворимо рівняння (28) з двома змінними x і t у рівняння з однією змінною. Для цього, записавши поперечне переміщення деякого перерізу стрижня з абсцисою x у такому вигляді:

$$z = z(x) \cdot \sin \omega t,$$

де ω – кутова частота, отримаємо диференціальне рівняння коливань

$$\frac{d^4 z}{dx^4} - \frac{\lambda_j^4 z}{l_j^4} = 0, \text{ де } \frac{\lambda_j^4 z}{l_j^4} = \frac{m_{xj} \omega^2}{E_j J_{\psi j}}.$$

Для розв'язання наведеного рівняння особливо ефективно застосувати метод початкових параметрів у матричній формі. В остаточному вигляді цей метод формує розгорнені рівняння частот і форм, що дає змогу використати його для знаходження всіх власних частот і відносних амплітуд коливань. За допомогою введення відповідних масштабів для довжин і жорсткостей легко виконати розрахунки, особливо з використанням обчислювальних машин, оскільки ітеративна природа методу початкових параметрів особливо пристосована до програмування.

Здійснимо наближену заміну ділянки стрижня з розподіленою масою невагомою ділянкою з зосередженою масою $m_j = m_{xj} l_j$, розміщеною в j -му перерізі. Для цього на кожній ділянці стрижня розподілену масу заміняємо зосередженою, яка зводиться до центра ваги ділянки (рис.8, б). Потім зосереджені маси ділянок можна звести за принципом важеля до границь ділянок, що призводить до простішої динамічної системи з однаковими довжинами ділянок і меншим числом ступенів вільності (рис.8, в).

Розглянемо ділянку стрижня між j -м і $j-1$ -м перерізами (рахуючи ліворуч), що складається з безмасового відрізка стрижня довжиною l_j , жорсткості $E_j J_{\psi j}$ і зосередженої маси m_j (рис.8, з). Позначимо параметри у перерізі j через z_j , ϕ_j , M_j , Q_j , у перерізі $j-1$ – через z_{j-1} , ϕ_{j-1} , M_{j-1} , Q_{j-1} . Внаслідок наявності точкової маси m_j у коливаннях стрижня амплітудне значення поперечної сили у перерізі j переносить кінцевий розрив на величину $m_j \omega^2 z_j$. Вирахувавши за правилом диференціювання за параметром послідовно першу, другу та третю похідні від z_j , прийдемо до основних рівнянь методу початкових параметрів:

$$z_j = z_{j-1} + \phi_{j-1} l_j + M_{j-1} \frac{l_j}{2E_j J_{\psi j}} + Q_{j-1} \frac{l_j}{6E_j J_{\psi j}};$$

$$\phi_j = \phi_{j-1} + M_{j-1} \frac{l_j}{E_j J_{\psi j}} + Q_{j-1} \frac{l_j}{E_j J_{\psi j}};$$

$$M_j = M_{j-1} + Q_{j-1} l_j; \quad Q_j = Q_{j-1} + m_j \omega^2 z_j.$$

Знаки окремих членів у наведених формулах ставляться відповідно до взятих напрямків осей координат, прогинів, кута повороту, згинального моменту та поперечної сили (рис.8, з). Підставивши в четверте рівняння замість z_j його вираз із першого, отримаємо рівняння, в якому параметри у перерізі j виражені через параметри у перерізі $j-1$.

Співвідношення між початковими параметрами та їх значеннями в будь-якому перерізі стрижня можна подати у вигляді добутку певної квадратної матриці на матрицю-стовпець. Беручи до уваги правило множення матриць, останні співвідношення можна записати

$$Z_j = \frac{T_j}{Z_{j-1}}, \quad (31)$$

де Z_j і Z_{j-1} – матриці-стовпці параметрів у j -му та $j-1$ -му перерізах стрижня,

$$Z_j = \begin{bmatrix} z_j \\ \varphi_j l \\ \frac{M_j l^2}{EJ\psi} \\ \frac{Q_j l^3}{EJ\psi} \end{bmatrix}, \quad Z_{j-1} = \begin{bmatrix} z_{j-1} \\ \varphi_{j-1} l \\ \frac{M_{j-1} l^2}{EJ\psi} \\ \frac{Q_{j-1} l^3}{EJ\psi} \end{bmatrix};$$

матриця j -ої ділянки, замкнена між $j-1$ -м і j -м перерізами T_j – перехідна,

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & b_j & \frac{b_j^2}{2a_j} & \frac{b_j^3}{6a_j} \\ 0 & 1 & \frac{b_j}{a_j} & \frac{b_j^2}{2a_j} \\ 0 & 0 & 1 & b_j \\ v_j & v_j b_j & \frac{v_j b_j^2}{2a_j} & \frac{v_j b_j^3}{6a_j + 1} \end{bmatrix};$$

де: $b_j = l_j/l$; $a_j = (1 + i\gamma_j)EJ_j \psi / (EJ\psi)$; $v_j = m_j \omega^2 l^3 / (EJ\psi)$; $EJ_j \psi$ і l – довільно вибрані зручні значення жорсткості та довжини, вводяться в рівняння (31) для досягнення однакової розмірності.

Рівняння (31) дає змогу перетворити параметри напруженого та деформованого стану у початковому перерізі j -ої ділянки у параметри перерізу кінця ділянки стрижня для згину у вертикальній поздовжній площині.

Залежність між параметрами на кінцях ділянки з розподіленою масою для кручення у вертикальній поперечній площині (рис.8, д) виражається рівнянням

$$\theta_j = L_j \theta_{j-1}, \quad (32)$$

де θ_{j-1} і θ_j – матриці-стовпці параметрів в $j-1$ -му і j -му перерізах стержня,

$$\theta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \frac{M_{kj} l}{GJ_p \psi_k} \end{bmatrix}; \quad \theta_{j-1} = \begin{bmatrix} \beta_{j-1} \\ \frac{M_{k(j-1)} l}{GJ_p \psi_k} \end{bmatrix};$$

β_{j-1} і $M_{k(j-1)}$ – амплітуди кута закручування та крутного моменту в $j-1$ -му перерізі; β_j і M_{kj} – ті самі амплітуди в j -му перерізі; L_j – перехідна матриця ділянки,

$$L_j = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_j}{\alpha_{kj}} \\ e_j & -\frac{e_j b_j}{\alpha_{kj} + 1} \end{bmatrix}; \quad e_j = m_j \frac{(\rho_{kj}^2 + h_{\beta j}^2) \omega^2 + gh_{\beta j}}{GJ_p \psi_k}.$$

Структура алгоритму розрахунку параметрів коливань пакета стовбурів – це багаторазово повторюваний цикл алгоритмічних операцій, що відповідають переходові від однієї ділянки до іншої, і має такий вигляд:

згинні коливання пакета стовбурів на двох шарнірних опорах

$$\begin{aligned} Z_m &= T_m \dots T_n Z_n + D_1; \\ Z_n &= T_n \dots T_1 T_0 Z_0 + D_2; \end{aligned} \quad (33)$$

крутильні коливання пакета стовбурів з жорстко затисненим (у відземковому перерізі) кінцем і проміжною опорою

$$\begin{aligned} \theta_m &= L_m \dots L_{n+1} \theta_n + D_{\kappa 1}; \\ \theta_n &= L_n \dots L_1 L_0 \theta_0 + D_{\kappa 2}, \end{aligned} \quad (34)$$

де Z_m , Z_n і Z_0 , θ_m , θ_n і θ_0 – матриці-стовпці параметрів в m -му, n -му і нульовому (кінець вершинної частини) перерізах пакета стовбурів;

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Z_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi_0 l; \quad \theta_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_0;$$

D_1 і D_2 , $D_{\kappa 1}$ і $D_{\kappa 2}$ – матриці реакцій опор, що здійснюють перетворення параметрів перерізу безпосередньо справа у параметри перерізу безпосередньо зліва від перерізу опори;

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Q_1 l^3}{EJ\psi} \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Q_2 l^3}{EJ\psi} \end{bmatrix}; \quad D_{\kappa 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_{\kappa 1} l}{GJ_p \psi_k} \end{bmatrix}; \quad D_{\kappa 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_{\kappa 2} l}{GJ_p \psi_k} \end{bmatrix},$$

Q_1 , Q_2 , $M_{\kappa 1}$, $M_{\kappa 2}$ – поперечні сили та крутні моменти в опорних перерізах пакета стовбурів.

Викладений алгоритмічний метод розрахунку коливань пакета стовбурів доцільно застосовувати в аналізі вільних коливань пакета деревини змінного поперечного перерізу з метою виявлення впливу його характеристик на параметри коливань і обґрунтування розрахункової моделі [3]. Метод можна успішно використати також для розгляду спільних коливань пакета стовбурів і транспортних ланок під дією гармонійних і випадкових збурень.

Виведемо рівняння для розрахунку частот і форм вільних коливань пакета стовбурів у навантаженому стані. Для цього подамо вирази (33) для матриць Z_m і Z_n у такому вигляді:

$$\begin{aligned} Z_m &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_m l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ a_{3m} \\ a_{4m} \end{bmatrix} Z_0 + \begin{bmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ b_{3m} \\ b_{4m} \end{bmatrix} \varphi_0 l + \begin{bmatrix} c_{1m} \\ c_{2m} \\ c_{3m} \\ c_{4m} \end{bmatrix} d_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}; \\ Z_n &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_n l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \end{bmatrix} Z_0 + \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ b_{4n} \end{bmatrix} \varphi_0 l + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (34)$$

де a , b , c з індексами – елементи матриць-стовпців, отримані внаслідок перемноження матриць відповідно до плану (33);

$$d_1 = \frac{Q_1 l^3}{EJ\psi}; \quad d_2 = \frac{Q_2 l^3}{EJ\psi}.$$

Із матричних рівнянь (34) виділяємо три однорідні алгебричні рівняння з трьома невідомими, внаслідок розв'язання яких отримаємо частотне рівняння у такому вигляді:

$(a_{3m} c_{1m} - a_{1m} c_{3m}) \cdot b_{1m} - (b_{3m} c_{1m} - b_{1m} c_{3m}) \cdot a_{1m} = 0$
і вираз для визначення відносних амплітуд (форм) за умови $z_0 = 1$

$$z_j = \frac{(a_{1j} b_{1n} - a_{1n} b_{1j}) c_{1m} - (a_{1m} b_{1n} - a_{1n} b_{1m}) c_{1j}}{a_{1n} b_{1n}}. \quad (35)$$

Вирази для матриць θ_m і θ_n

$$\theta_m = \frac{0}{\frac{M_{km}l}{GJ_p \psi_k}} = \frac{p_{1m}}{p_{1m}} \beta_0 + \frac{q_{1m}}{q_{1m}} d_{k2} + \frac{0}{d_{k1}};$$

$$\theta_n = \frac{0}{\frac{M_{kn}l}{GJ_p \psi_k}} = \frac{p_{1n}}{p_{1n}} \beta_0 + \frac{0}{d_{k1}}, \quad (36)$$

де p, q з індексами – елементи матриць-стовпців, отримані перемноженням перехідних матриць відповідно до плану (34);

$$d_{k1} = \frac{M_{kl}l}{GJ_p \psi_k}; \quad d_{k2} = \frac{M_{k2}l}{GJ_p \psi_k}.$$

З матричних рівнянь (36), взявши $M_{k2}=Q_{cp} h_{\beta 2} \beta_0$, де Q_{cp} – вага пакета стовбурів, що припадає на коник розпуску, отримаємо вирази для визначення власних частот і форм (для $\beta_0=1$) у такому вигляді:

$$p_{1m} + \frac{q_{1m} p_{1m} Q_{cp} h_{\beta 2} l}{GJ_p \psi_k} = 0; \quad \beta_j = p_{1j} + \frac{q_{1j} p_{1m} Q_{cp} h_{\beta 2} l}{GJ_p \psi_k}. \quad (37)$$

Розглядаючи лінійні коливання в горизонтальній площині разом з кутовими коливаннями у вертикальній поперечній площині, рівняння (29) і (30) можна подати у такому вигляді:

$$Y_j = F_j P_j Y_{j-1},$$

де Y_j – матриця параметрів у j -му перерізі стрижня,

$$Y_j = \begin{pmatrix} y_j \\ \gamma_j l \\ M_j l^3 / (EJ \psi') \\ Q_j l^3 / (EJ \psi') \\ \beta_j \\ M_{kj} l / (GJ_p \psi_k) \end{pmatrix};$$

перехідна матриця жорсткості j -ої ділянки

$$F_j = \begin{pmatrix} 1 & b_j & b_j^2 / 2\alpha'_j & b_j^3 / 2\alpha'_j & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_j / \alpha'_j & b_j^2 / 2\alpha'_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_j / \alpha_{kj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

матриця зосередженої маси j -ої ділянки

$$P_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_j & 0 & 0 & l_j & u_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \chi_j & 0 & 0 & 0 & -e_j & 1 \end{pmatrix};$$

$$\alpha'_j = (1 + i\gamma_j) E_j J_j \psi_j / (EJ \psi'); \quad v_j = m_j \omega^2 l^3 / (EJ \psi'); \quad u_j = m_j h_{\beta} j \omega^2 l^3 / (EJ \psi_j); \quad \chi_j = m_j \omega^2 l / (GJ_p \psi_k);$$

$$e_j = m_j [(\rho_{\chi j}^2 + h_{\beta} j^2) \omega^2 + g h_{\beta} j] l / (GJ_p \psi_k).$$

Алгоритм розрахунку згинно-крутильних коливань пакета стовбурів має такий вигляд:

$$Y_m = F_m P_m \dots F_{n+1} P_{n+1} Y_n + D_{\text{зк1}};$$

$$Y_n = F_n P_n \dots F_1 P_1 F_0 P_0 Y_0 + D_{\text{зк2}},$$

де Y_m, Y_n і Y_0 – матриці-стовпці параметрів у m -му, n -му і нульовому перерізах пакета стовбурів; $D_{\text{зк1}}$ і $D_{\text{зк2}}$ – матриці реакцій опор. Вирази для них, а також рівняння для розрахунку частот і форм аналогічні виразам (31)–(34).

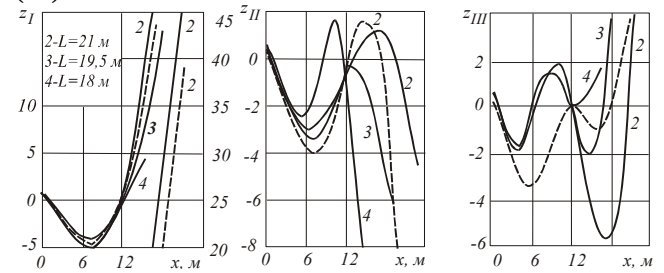


Рис.9. Власні форми коливань пакета стовбурів:
суцільна лінія – розрахункові криві для $E=\text{const}$,
штриховані криві для $E=\text{const}, \rho=\text{const}$, $\circ$ – експериментальні точки; градації правої шкали належать до кривих 2

На рис.9 показано відносні амплітуди (форми) вільних поперечних коливань стовбура, вираховані за виразом (33). Зі зміною довжини стовбура L у реальних межах (від 23 до 12 м) його частоти збільшуються у 1,5–3,0 рази, а характер їх залежності від відстані між кониками, як і форми коливань, особливо для вищих частот (див. рис.9) істотно змінюються. Якщо нехтувати зміною щільності деревини та особливо модуля деформації вздовж стовбура, то значення параметрів власних коливань можуть відрізнятися від реальних у 1,5–2,0 і більше разів, а якщо нехтувати зміною коефіцієнта жорсткості за довжиною, то у 1,1–1,5 рази [5].

Таким чином, у розрахунках коливань як окремих стовбурів, так і пакетів значення фізико-механічних характеристик деревини треба брати за результатами їх заміру для реальних стовбурів, без порушення цілісності останніх, беручи до уваги не тільки породу дерев та основні таксаційні характеристики, але й закони їх зміни за довжиною.

Внаслідок експериментальних випробувань на описаному вище стенді та аналітичних досліджень вільних згинних коливань стовбурів і пакетів з використанням наведених розрахункових виразів установлено, що для розрахунку коливань пакета в навантаженому стані потрібно розділити його щонайменше на шість-вісім однакових ділянок, у напівнавантаженому – на три-чотири ділянки. Подаючи пакет стовбурів дискретною моделлю, кількість зосереджених мас потрібно брати щонайменше чотири-п'ять (з них дві-три пружно підвішені) для пакета стовбурів у навантаженому стані і три-чотири (з них одна-дві пружно підвішені) для пакета довгих сортиментів і пакета стовбурів (дерев), транспортованого у напівнавантаженому стані [1].

3. Методика розрахунку параметрів дискретної моделі пакета стовбурів

Під час дослідження спільних коливань пакета стовбурів і транспортних ланок як динамічних систем, поданих у вигляді математичних моделей з зосередженими параметрами, виникає потреба у визначенні дискретних параметрів пакета стовбурів. Для визначення величини і розміщення дискретних мас, якими умовно замінюється розподілена маса пакета стовбурів, доцільно використовувати аналітичні залежності, що дає змо-

гу легко алгоритмізувати і запрограмувати розв'язок задачі [6]. Для виведення таких залежностей подамо рівняння, отримані з умови однаковості кінетичних енергій системи з розподіленими параметрами (див. рис.8) і її дискретної моделі (рис.10), що забезпечують їх динамічну еквівалентність, у такому вигляді:

$$\sum_{j=1}^N m_j U_{jk}^2 = \sum_{x=1}^N m(x) U_{xk}^2 \Delta x; \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j U_{jk} = \sum_{x=1}^N m(x) U_{xk} \Delta x; \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j U_{jk} S_j = \sum_{x=1}^N m(x) U_{xk} x \Delta x. \quad (40)$$

З динаміки твердого тіла відомо, що динамічна відповідність дискретної і розподіленої моделей забезпечується у разі дотримання таких умов:

$$\sum_{j=1}^N m_j v_j + m_1 v_{c1} + m_2 v_{c2} = 0; \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j v_j^2 + m_1 v_{c1}^2 + m_2 v_{c2}^2 = m_c \rho_{yc}^2; \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j + m_1 + m_2 = m_c. \quad (43)$$

Тут m_j – пружно підвішена j -та зосереджена маса дискретної моделі пакета стовбурів ($j = \overline{1, n}$); m_{k1} і m_{k2} – зосереджені маси дискретної моделі пакета стовбурів, зведені до передньої і задньої опор; U_{jk} – амплітуда пружних коливань j -ої маси дискретної моделі пакета стовбурів для k -ої форми ($k=1, 2, \dots, N$); S_j – відстань від відземкового перерізу до j -ої маси дискретної моделі пакета стовбурів; $m(x)$ – маса поперечного перерізу пакета стовбурів у перерізі x ; U_{xk} – амплітуда пружних коливань пакета стовбурів у перерізі x для k -ої форми; x – відстань від відземкового перерізу; $x=1, 2, \dots, K$; Δx – крок інтегрування; v_j – відстань від j -ої маси до центру ваги пакета, $v_j = \varepsilon - S_j$; v_{k1} і v_{k2} – відстань від мас m_{k1} і m_{k2} до центра ваги пакета, $v_{k1} = \varepsilon - a$; $v_{k2} = l_0(\varepsilon - a)$; m_c і ρ_{yc} – маса та радіус інерції пакета стовбурів відносно поперечної осі, що проходить через його центр ваги. Для пакета, поданого у вигляді ступінчастого стрижня, замість маси $m(x)$ береться маса одиниці довжини j -ої ділянки m_{xj} , або, наближено, зосереджена маса $m_j = m_{xj} l_j$, l_j – довжина j -ої ділянки стрижня.

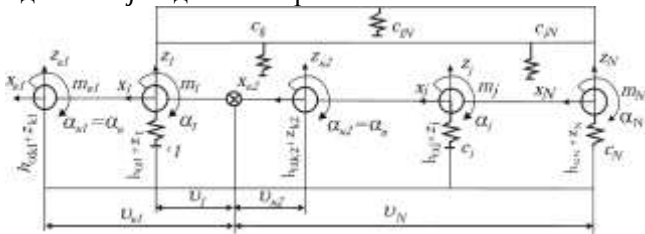


Рис.10. Модель, яка описує коливання пакета стовбурів у вертикальній поздовжній площині

Кількість рівнянь (38)-(40) відповідає кількості форм коливань, що розглядаються, котрі, своєю чергою, дорівнюють кількості зосереджених мас, якими замінюють розподілену масу пакета стовбурів. Система рівнянь (38)-(43) неоднорідна. Кількість рівнянь на $j+1$ перевищує кількість невідомих. Оскільки рівняння (38)-(40) достатньо мірою визначають вели-

чину та розміщення пружно підвішених мас m_j , а розміщення зосереджених мас m_{k1} і m_{k2} відомо (вони зведені до опор), то можна вибрати такий план розв'язання задачі:

з рівнянь (39) і (40) шляхом виключення мас m_j визначити значення відстаней S_j ;

за заданими S_j встановити значення амплітуд U_{jk} і, підставляючи їх у рівняння (38), визначити величини мас m_j ;

з рівнянь (41) і (42) за заданими m_j визначити маси m_{k1} і m_{k2} , зведені до опор;

точність моделювання встановити за допомогою виразу (43).

Позначивши праві частини рівнянь (38) для I, II і III форм відповідно через b_1, b_2, b_3 , рівнянь (39) – через A, B і C , а рівняння (40) – через D, E і F , і виконавши певні перетворення з рівняннями (38)-(43) відповідно до поданого вище плану, отримаємо вирази для визначення величини і розміщення дискретних мас пакета стовбурів.

Для моделювання розподіленої маси пакета стовбурів трьома дискретними масами

$$s_1 = D/A; m_1 = b_1/U_1^2; \quad (44)$$

чотирма дискретними масами

$$\begin{aligned} s_1 &= (E - DU_{22}/U_{21})/(B - AU_{22}/U_{21}); \\ s_2 &= (E - DU_{12}/U_{11})/(B - AU_{12}/U_{11}); \\ m_1 &= (b_2 U_{21}^2 - b_1 U_{22}^2)/(U_{12}^2 U_{21}^2 - U_{11}^2 U_{22}^2); \\ m_2 &= (b_2 U_{21}^2 - b_1 U_{12}^2)/(U_{11}^2 U_{22}^2 - U_{12}^2 U_{21}^2); \end{aligned} \quad (45)$$

п'ятьма дискретними масами

$$\begin{aligned} s_1 &= [(F - DU_2^{31})(U_3^{21} - U_2^{21}) - (E - DU_2^{21})(U_3^{31} - U_2^{31})]/ \\ &\quad [(C - AU_2^{31})(U_3^{21} - U_2^{21})(B - AU_2^{21})(U_3^{31} - U_2^{31})]; \\ s_2 &= [(F - DU_1^{31})(U_3^{21} - U_1^{21}) - (E - DU_1^{21})(U_3^{31} - U_1^{31})]/ \\ &\quad [(C - AU_1^{31})(U_3^{21} - U_1^{21})(B - AU_1^{21})(U_3^{31} - U_1^{31})]; \\ s_3 &= [(F - DU_1^{31})(U_2^{21} - U_1^{21}) - (E - DU_1^{21})(U_2^{31} - U_1^{31})]/ \\ &\quad [(C - AU_1^{31})(U_2^{21} - U_1^{21})(B - AU_1^{21})(U_2^{31} - U_1^{31})]; \end{aligned}$$

$$U_1^{21} = U_{12}/U_{11}; U_1^{31} = U_{13}/U_{11};$$

$$U_2^{21} = U_{22}/U_{21}; U_2^{31} = U_{23}/U_{21};$$

$$U_3^{21} = U_{32}/U_{31}; U_3^{31} = U_{33}/U_{31};$$

$$m_1 = d_1/d; m_2 = d_2/d; m_3 = d_3/d;$$

$$d_1 = b_1 c_1 + b_2 (U_{31}^2 U_{32}^2 - U_{33}^2 U_{21}^2) + b_3 (U_{21}^2 U_{32}^2 - U_{22}^2 U_{31}^2);$$

$$d_2 = b_1 c_2 + b_2 (U_{11}^2 U_{33}^2 - U_{13}^2 U_{31}^2) + b_3 (U_{31}^2 U_{12}^2 - U_{32}^2 U_{11}^2);$$

$$d_3 = b_1 c_3 + b_2 (U_{21}^2 U_{13}^2 - U_{23}^2 U_{11}^2) + b_3 (U_{11}^2 U_{22}^2 - U_{12}^2 U_{21}^2);$$

$$d = c_1 U_{11}^2 + c_2 U_{21}^2 + c_3 U_{31}^2; c_1 = U_{22}^2 U_{33}^2 - U_{32}^2 U_{23}^2;$$

$$c_2 = U_{32}^2 U_{13}^2 - U_{12}^2 U_{33}^2; c_3 = U_{12}^2 U_{23}^2 - U_{22}^2 U_{13}^2. \quad (46)$$

У наведених виразах значення S_j визначаємо методом ітерацій. Для всіх розглянутих випадків маси, зведені до опор, розраховуємо за формулами

$$m_{e1} = m_n \rho_{yc}^2 - \sum_{j=1}^N m_j v_j (v_j - v_{e1}) / v_{e1} (v_{e1} - v_{e2});$$

$$m_{e2} = m_n \rho_{yc}^2 - \sum_{j=1}^N m_j v_j (v_j - v_{e2}) / v_{e2} (v_{e2} - v_{e1}). \quad (47)$$

Алгоритм визначення величини та розміщення дискретних мас пакета стовбурів, орієнтований на зас-тосування комп'ютера, показано на рис.11.

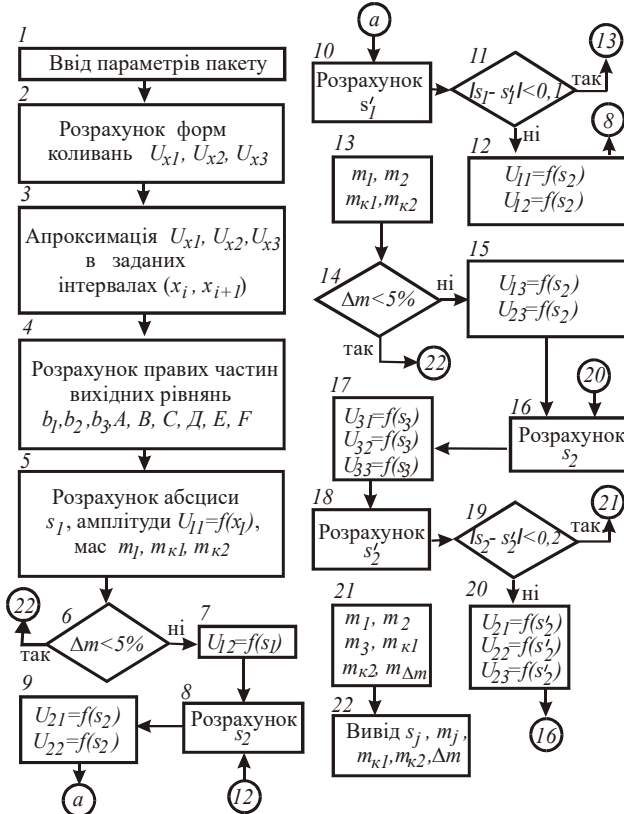


Рис.11. Алгоритм розрахунку величини та розміщення дискретних мас пакета стовбурів

З використанням цієї методики автори разом з І.Мирецьким виконали розрахунки величини та розміщення дискретних мас для пакетів з великих і тонких стовбурів, а також напівстовбурів смереки. Результати дискретизації подано на рис.12.

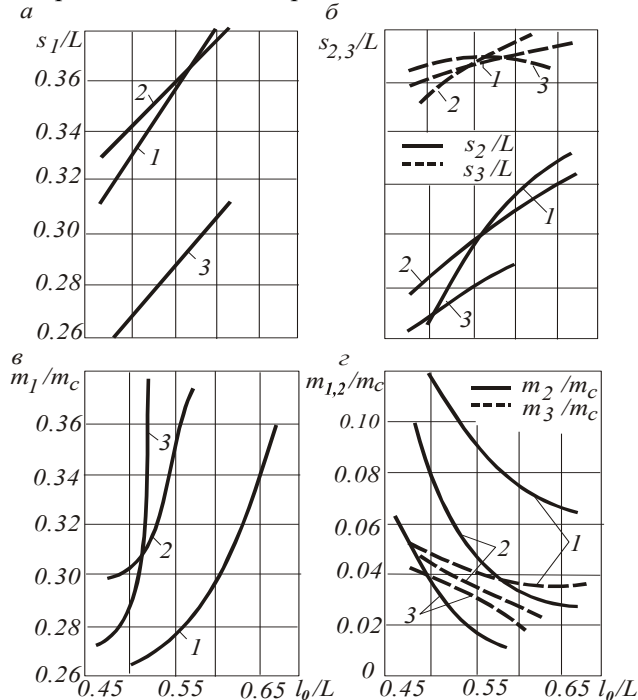


Рис.12. Залежність абсциси (а і б) і величини (в і г) дискретних мас від відстані між опорами: 1 – великі; 2 – тонкі стовбури; 3 – сортименти

Унаслідок аналізу отриманих даних установлено, що кількість, величина та розміщення дискретних мас істотно залежать від відстані між кониками l_0 . У всіх розглянутих випадках зі зменшенням l_0 різко зростає похибка дискретизації, що зумовлює потребу заміни пакета більшою кількістю дискретних мас для забезпечення потрібної точності розрахунку.

Наприклад, з точністю до 5% можна моделювати за чотиримасовим варіантом пакет стовбурів для відношення $l_0/L \geq 0,54$ і напівстовбурів для $l_0/L \geq 0,63$, а за п'ятимасовим варіантом – відповідно для $l_0/L \geq 0,51$ і $0,55$. З точністю до 12% можна заміняти трьома масами пакет напівстовбурів для $l_0/L \geq 0,63$, чотирма масами – пакет стовбурів для $l_0/L \geq 0,51$ і напівстовбурів для $l_0/L \geq 0,55$, п'ятьма масами пакет стовбурів для $l_0/L \geq 0,48$. Реальний діапазон зміни відношення l_0/L становить для стовбурів 0,48-0,57 і напівстовбурів 0,55-0,71.

Значення коефіцієнтів жорсткості пакета, поданого у вигляді дискретних мас, можна визначити, виходячи з таких міркувань. Для утримання системи у стані рівноваги, що визначається ненульовими значеннями узагальнених координат z_j до системи, потрібно прикласти узагальнені сили P_j , які дорівнюють

$$P_j = \sum c_{jv} z_v, \quad (j = \overline{1, n}; v = \overline{1, N}), \quad (48)$$

де c_{jv} – коефіцієнти жорсткості.

Оскільки визначник цього рівняння ненульовий, то його можна розв'язати відносно координат z_j

$$z_j = \sum \alpha_{jv} P_v,$$

де α_{jv} – коефіцієнти впливу.

Якщо значення z_j обнулити, за винятком координати z_v , якій надамо значення 1, і підставити вираз (48) у вираз (49), то отримаємо N систем із N рівнянь, розв'язуючи які визначимо значення коефіцієнтів жорсткості c_{jv} для дискретної моделі в місцях зведення зосереджених мас:

для тримасового варіанта

$$c_{11} = 1/\alpha_{11}; \quad (50)$$

для чотиримасового варіанта

$$c_{11} = \alpha_{22}/\Delta; \quad c_{12} = -\alpha_{12}/\Delta; \quad c_{21} = \alpha_{21}/\Delta; \quad c_{22} = \alpha_{11}/\Delta; \quad \Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}; \quad (51)$$

для п'ятимасового варіанта

$$c_{11} = (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32})/\Delta; \quad c_{23} = (\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11})/\Delta; \\ c_{12} = (\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33})/\Delta; \quad c_{33} = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})/\Delta; \\ c_{13} = (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})/\Delta; \quad c_{31} = (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22})/\Delta; \\ c_{22} = (\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{31})/\Delta; \quad c_{23} = (\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{32}\alpha_{11})/\Delta; \\ c_{21} = (\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{21}\alpha_{33})/\Delta;$$

$$\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}. \quad (52)$$

Коефіцієнти впливу α_{jv} , які входять у вирази (50)-(52), визначають зміну координат z_j від дії одиничної узагальненої сили $P_k=1$, що відповідає координаті z_v . Вони обчислюються шляхом використання методів будівельної механіки за відомими значеннями $EJ\psi(x)$.

Для пакета стовбурів, поданого у вигляді балки на двох шарнірних опорах, коефіцієнти впливу відповідають принципу взаємних переміщень, тобто $\alpha_{jv} = \alpha_{vj}$, а значить, і коефіцієнти жорсткості $c_{jv} = c_{vj}$.

Описаний метод дискретизації пакета дає змогу здійснити заміну пакета з розподіленими характеристиками їхніми дискретними значеннями за мінімальною потребою для забезпечення заданої точності розрахунку кількості дискретних мас.

Висновки

Виконані теоретичні й експериментальні дослідження дали змогу виявити головні особливості та характеристики специфічного вантажу, який перевозить рухомий склад лісовозних доріг, і послужили підставою для створення просторових моделей "оператор–дорога–транспортні ланки–пакет деревини", призначених для розрахунку показників експлуатаційних властивостей лісотransпортних засобів [8].

ЛІТЕРАТУРА

1. Библиок Н.И., Перетятко Б.Т. Экспериментальное исследование собственных частот хлыста как предмета транспортирования // Лесное хозяйство, лесн., бум. и деревообр. пром-сть: респ. межвед. науч.-техн. сб. – К.: Будівельник, 1974. – Вып. 3. – С. 64–69.
2. Библиок Н.И. Применение матричного метода начальных параметров для расчета колебаний лесовозного автопоззда // Лесной журнал. – 1977. – № 3. – С. 42–47.
3. Библиок Н.И. Исследование свободных колебаний пакета хлыстов переменного поперечного сечения // Лесной журнал. – 1981. – № 5. – С. 41–45.
4. Библиок Н.И., Витлицкий В.И., Бойко А.А., Перетятко Б.Т., Мирецкий И.Л. Определение модуля упругости хлыстов при изгибе хлыстов без нарушения их целостности // Лесной журнал. – 1981. – № 6. – С. 45–50.
5. Библиок Н.И., Перетятко Б.Т. О сходимости результатов теоретических и экспериментальных исследований изгибных колебаний хлыстов // Лесной журнал. – 1983. – №5. – С. 38–42.
6. Библиок Н.И. Метод расчета величины и размещения дискретных масс пакета хлыстов // Лесной журнал. – 1984. – №3. – С. 35–39.
7. Библиок Н.И., Бойко А.А., Мирецкий И.Л., Стиранивский О.А. О динамических характеристиках пакета хлыстов как предмета транспортирования // Лесной журнал. – 1985. – №6. – С. 31–35.
8. Библиок Н.И. Моделирование просторовых коливань лісотransпортного засобу // Наукові праці : зб. наук. праць ЛАН України. – 2003. – Вип. 2. – С. 123–131.
9. Бойко А.А., Библиок Н.И., Мирецкий И.Л. Определение модуля упругости хлыстов при кручении // Лесной журнал. – 1981. – №5. – С. 59–63.
10. Гастев Б.Г., Мельников В.И. Основы динамики лесовозного подвижного состава. – М.: Лесн. пром-сть, 1967. – 220 с.

N. I. Byblyuk, A. A. Boyko, B. T. Peretyatko

DESCRIPTIONS AND MODEL OF TRUNKS PACKAGE AS TRANSPORTING OBJECT

The results of analytical experimental determination of physical mechanical descriptions for trunks package, and methods of mathematical description and parameters calculation of its free vibrations are presented in the paper.

