УДК 634.0.81

Б.П. ПОБЕРЕЙКО[1]

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ ВСЕРЕДИНІ ТА НА МЕЖІ НЕРУЙНІВНОЇ ОБЛАСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ДЕРЕВИНИ

Отримано рівняння руху та теплоперенесення для деформованої деревини зі змінним вологовмістом. Показано, що процеси перенесення тепла у висушуваних пиломатеріалах є залежними від полів деформацій. Зокрема, виявлено, що у випадку усебічного стиску процеси перенесення тепла всередині матеріалу сповільнюються, а у випадку усебічного розтягу – пришвидшуються.

Вступ

Тепломасообмінні, релаксаційно-деформівні та міцнісні процеси у висушуваній деревині є взаємозв'язаними та взаємообумовленими **[**1-4**]**. Взаємозв'язок різних, на перший погляд, за фізичною природою явищ зумовлений складними перетвореннями різних форм руху матерії всередині деревини, зокрема, теплової у механічну та навпаки. Істотним є те, що в усіх цих перетвореннях змінюється лише якість, а кількість, яку називають енергією, залишається сталою. Тому опис процесів теплоперенесення у деформованій деревині зі змінним вологовмістом повинен ґрунтуватися на законі збереження енергії. Підтвердженням цього є існуючі моделі визначення аналогічних процесів у недеформованій деревині, які отримали експериментальне підтвердження. Але, обмін енергією між різними складовими та частинами твердого тіла є залежним від роботи сил, які діють у його середовищі. У зв'язку з цим для застосування закону збереження енергії потрібно проаналізувати та визначити ці сили.

1. Закон збереження кількості руху: виведення рівняння руху

В умовах гідротермічної обробки деформативність деревини визначається різними за фізичною природою силами деформування. Результуюча цих сил $\vec{F}$, згідно з другим законом Ньютона, прямопропорційна швидкості деформування матеріалу **[**5**]**:

$$\vec{F} = \int\limits_{V(\tau)} \rho \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} dV(\tau), \tag{1}$$

З іншого боку, сила $\vec{F}$ дорівнює алгебраїчній сумі об'ємних гравітаційних $\vec{F}_V$ (сил земного тяжіння), поверхневих $\vec{F}_S$ та реактивних $\vec{F}_m$ сил, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}_V + \vec{F}_S + \vec{F}_m. \tag{2}$$

Об'ємні сили – це сили дальньої дії. У нашому випадку це сили тяжіння. Вони прямопропорційні масі матеріалу **[**5**]**, і їх можна подати у вигляді інтеграла за об'ємом розглядуваного тіла

$$\vec{F}_V = \int\limits_{V(\tau)} \vec{f}_V \rho dV(\tau), \tag{3}$$

де $\vec{f}_V$ – питома об'ємна сила (сила, віднесена до одиниці маси речовини), яка характеризує масові сили у суцільному середовищі.

Поверхневі сили – це сили, дія яких на певний об'єм суцільного середовища здійснюється через матеріальні точки поверхні, яка обмежує цей об'єм. Це сили контактної взаємодії сусідніх об'ємів матеріалу вздовж поверхні їх дотику **[**5**]**. Вони є результатом сил молекулярної взаємодії. Однією із причин їх виникнення у висушуваних гігроскопічних матеріалах, до класу яких належить, зокрема, деревина, є нерівномірний розподіл полів температури і вологи **[**1, 3**]**. Ці сили є прямопропорційними величині площі контакту елементів взаємодії, вони залежать від орієнтації цієї площі, а не від значень величин об'ємів елементів. Їхні значення та напрям визначаються інтегралом по поверхні

$$\vec{F}_S = \oint\limits_{S(\tau)} \vec{\sigma}_n dS(\tau), \tag{4}$$

де $\vec{\sigma}_n$ – напруження, які діють на елемент поверхні dS з одиничним вектором нормалі $\vec{n}$.

Реактивні сили $\vec{F}_m$ зумовлені масообмінними процесами. Для їх визначення та обґрунтування причин виникнення розглянемо висушувану деревину у вигляді сукупності матеріальних точок (частинок) з нескінченно малою масою $\rho\Delta V$. Тоді, оскільки, у цьому випадку, маса деревини з часом зменшується, то доцільно припустити, що кожна частинка за одиницю часу виділяє певну кількість вологи масою

$$\Delta m_{\hat{a}\hat{i}\ddot{e}} = q\Delta V, \tag{5}$$

де
$$q(\tau) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d\rho\Delta V}{d\tau}. \tag{6}$$

У підсумку, згідно з законом збереження кількості руху **[**6**]**, імпульс матеріальної точки суцільного середовища деревини за одиницю часу зміниться на величину, яка визначається за формулою

$$\vec{P}_m^{dV} = q(\vec{\upsilon}_{\hat{a}\hat{i}\ddot{e}} - \vec{\upsilon})\Delta V, \tag{7}$$

[1] **Богдан Петрович ПОБЕРЕЙКО** – кандидат технічних наук, доцент кафедри обчислювальної техніки і моделювання технологічних процесів, Національний лісотехнічний університет України. Україна, м. Львів. Тел.: +38032-226-03-14. E-mail: nauk.visnyk@gmail.com
Представив член-кореспондент ЛАН України, доцент Ю. І. Грицюк, кандидат технічних наук.

де $\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}}$ – швидкість руху вологи. Дійсно, нехай $\vec{\upsilon}_{\text{ăâ}}$ та $\vec{\upsilon}$ – швидкість руху частинки до та після виділення вологи. Тоді, за законом збереження імпульсу, імпульс частинки $\rho\Delta V\vec{\upsilon}_{\text{ăâ}}$ до виділення вологи дорівнює сумі імпульсів частинки $\left(\rho\Delta V - q\Delta V\right)\vec{\upsilon}$ та вологи $q\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}}\Delta V$ після їх розділення, тобто

$$q\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}}\Delta V + \left(\rho\Delta V - q\Delta V\right)\vec{\upsilon} = \rho\Delta V\vec{\upsilon}_{\text{ăâ}}. \qquad (8)$$

Звідси, $$\rho\Delta V\vec{\upsilon}_{\text{ăâ}} - \rho\Delta V\vec{\upsilon} = q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right)\Delta V. \qquad (9)$$

Права частина рівності (8) є різницею імпульсів матеріальної частинки до та після виділення вологи. Отже, замінивши її на $\vec{P}_m^{dV}$, отримаємо формулу (7), що і потрібно було довести.

Таким чином, формула для визначення складової швидкості зміни кількості руху для тіл зі змінною масою, зумовленої процесами масоперенесення має вигляд

$$\vec{P}_m = \int\limits_{V(\tau)} q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right)dV\left(\tau\right)dV. \qquad (10)$$

Але, за другим законом Ньютона, $\vec{F}_m = \vec{P}_m$, тому

$$\vec{F}_m = \int\limits_{V(\tau)} q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right)dV\left(\tau\right). \qquad (11)$$

Отже, з врахуванням формул (2)-(4) та (11), другий закон Ньютона (1) запишеться у вигляді

$$\begin{gathered}\int\limits_{V(\tau)} \rho\frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau}dV\left(\tau\right) = \int\limits_{V(\tau)} q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right)dV\left(\tau\right) + \\ + \int\limits_{V(\tau)} \rho\vec{f}dV\left(\tau\right) + \oint\limits_{S(\tau)} \vec{\sigma}_n dS\left(\tau\right)\end{gathered}. \qquad (12)$$

Подамо цей закон у локальній формі запису, записавши останній доданок у його правій частині у вигляді інтеграла за об'ємом. Для цього розглянемо елементарний тетраедр (рис. 1), довжини ребер якого дорівнюють Δx_1, Δx_2 та Δx_3.

Через $\Delta S_1 = \Delta x_2\Delta x_3$, $\Delta S_2 = \Delta x_1\Delta x_3$, $\Delta S_3 = \Delta x_1\Delta x_2$ позначимо площі граней тетраедра, які є перпендикулярними до базисних векторів просторової системи координат деформованого тіла, а через $\Delta\vec{S} = \left|\Delta\vec{S}\right|\vec{n}$ – вектор площі четвертої грані ABC. Окрім цього, припустимо, що вектор $\vec{n}$ орієнтовано на зовні, так що між $\Delta\vec{S}$ та ΔS_k існує зв'язок

$$\left|\Delta\vec{S}\right|\vec{n} = \Delta S_1\vec{i}_1 + \Delta S_2\vec{i}_2 + \Delta S_3\vec{i}_3. \qquad (13)$$

Тоді рівняння руху центра мас виділеного тетраедра масою Δm та об'ємом ΔV запишеться у вигляді

$$\Delta m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{d\tau} = \vec{f}\Delta m + \vec{\sigma}_n\Delta S_n + \vec{\sigma}_{-1}\Delta S_1 + \vec{\sigma}_{-2}\Delta S_{-2} + \vec{\sigma}_{-3}\Delta S_{-3}, \qquad (14)$$

де $\vec{\upsilon}_c$ – швидкість руху центра мас тетраедра; $\vec{\sigma}_{-k} = -\vec{\sigma}_k$ – напруження на площадці з нормаллю $\left(-\vec{i}_k\right)$. Однак, $\Delta S_k = n_k\Delta S$, а $\Delta m = \rho\Delta V$, де n_k – проекція вектора $\vec{n}$ на *k*-ту координатну вісь. Звідси, підставивши ΔS_k та Δm у (14), отримаємо

$$\left(\rho\frac{d\vec{\upsilon}_c}{d\tau} - \rho\vec{f}\right)\Delta V = \left(\vec{\sigma}_n - \sum_{k=1}^{3} n_k\vec{\sigma}_k\right)\Delta S. \qquad (15)$$

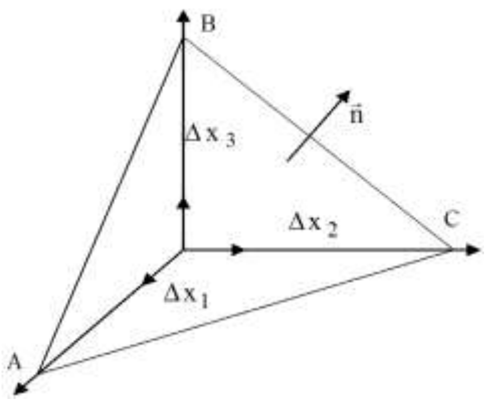

Рис. 1. Довільно орієнтований елемент поверхні у матеріалі

Розділивши отриманий результат на ΔS та здійснивши граничний перехід (спрямувавши ΔV до нуля), встановлюємо

$$\vec{\sigma}_n = \sum_{k=1}^{3} n_k\vec{\sigma}_k. \qquad (16)$$

Звідси, на основі теореми Гауса-Остроградського **[7]**

$$\oint\limits_S \vec{\sigma}_n dS = \oint\limits_S \sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k n_k dS = \sum_{k=1}^{3}\oint\limits_S \vec{\sigma}_k dS_k = \sum_{k=1}^{3}\int\limits_V \frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k}dV, \qquad (17)$$

Таким чином, з врахуванням (17), рівняння (12) можна подати у вигляді

$$\begin{gathered}\int\limits_{V(\tau)} \rho\frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau}dV\left(\tau\right) = \int\limits_{V(\tau)} q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right)dV\left(\tau\right) + \\ + \int\limits_{V(\tau)} \rho\vec{f}dV\left(\tau\right) + \sum_{k=1}^{3}\int\limits_V \frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k}dV\end{gathered}. \qquad (18)$$

або у локальній формі запису

$$\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} = q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right) + \rho\vec{f} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k}. \qquad (19)$$

Аналіз отриманого рівняння руху засвідчує, що у випадку двокомпонентних суцільних середовищ особливості їх деформативності є залежними від різниці швидкостей переміщення кожної компоненти: швидкості руху речовини сухого матеріалу $\vec{\upsilon}$ та швидкості переміщення вологи $\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}}$. Чим більшим є абсолютне значення різниці цих швидкостей, тим більше ці особливості себе виявляють. Виявлена закономірність – очевидна. Вона обґрунтовується залежністю густини потоку вологи від відносної швидкості її переміщення **[5]**

$$\vec{j}_{\text{ăî ë}} = \rho_{\text{ăî ë}}\left(\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}\right), \qquad (20)$$

Дійсно, із (20) витікає, що чим більшим є абсолютне значення векторної величини $\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}$, тим більше значення густини потоку вологи. Але, з огляду на рівняння нерозривності потоку вологи **[8]**, зростання абсолютних значень величини $\vec{j}_{\text{ăî ë}}$ є однією з основних причин прискорення масообмінних процесів між матеріалом і навколишнім середовищем, що і необхідно було показати. Окрім цього, зазначимо, що величина $\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon}$ визначає не лише інтенсивність протікання цих процесів, але і напрям їхню спрямованість. Для $\vec{\upsilon}_{\text{ăî ë}} - \vec{\upsilon} > 0$ масообмін відбуватиметься у напрямі "матеріал – навколишнє середовище", а у випадку виконання умови

$\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon} < 0$ – у напрямі "навколишнє середовище – висушуваний матеріал". Якщо $\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon} = \vec{0}$, то масообмін між матеріалом і навколишнім середовщем взагалі відсутній, а рівняння руху (19) у цьому частковому випадку зведеться до відомого рівняння руху для матеріалів сталої маси

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} = \rho \vec{f} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{\sigma}_k}{\partial x_k}. \tag{21}$$

Для подальших перетворень (19) із (20) знайдемо відносну швидкість руху зв'язаної вологи $\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon}$ та підставимо отриманий результат у (19). Тоді матимемо

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} = \frac{q}{\rho_{\text{ãî ë}}} \vec{j}_{\text{ãî ë}} + \rho \vec{f} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{\sigma}_k}{\partial x_k}. \tag{22}$$

Невідому величину q визначимо із (6). Для цього перетворимо праву частину цього співвідношення, скориставшись правилами диференціювання **[9]** та формулою зв'язку для елементарних об'ємів деформованого та недеформованого тіла **[8]**. Внаслідок цих перетворень отримаємо

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d\rho \Delta V}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} + \rho \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{J \Delta V(\tau_0)} \frac{dJ \Delta V(\tau_0)}{d\tau}. \tag{23}$$

Оскільки початковий об'єм матеріалу не залежить від часу деформування, тобто $\Delta V(\tau_0) = const$, то внісши $\frac{1}{\Delta V(\tau_0)}$ під знак похідної із (20), отримаємо

$$q = \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\rho}{J} \frac{dJ}{d\tau}, \tag{24}$$

або, з врахуванням результатів **[8]**, отримаємо:

$$q = \frac{d\rho}{d\tau} + \rho \, div \vec{\upsilon} = -div \vec{j}_{\text{ãî ë}}. \tag{25}$$

Отже, рівняння руху для гігроскопічних матеріалів змінної маси та об'єму у векторній формі запису має вигляд

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} = -\frac{div \vec{j}_{\text{ãî ë}}}{\rho_{\text{ãî ë}}} \vec{j}_{\text{ãî ë}} + \rho \vec{f} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \vec{\sigma}_k}{\partial x_k}. \tag{26}$$

2. Закон збереження енергії: перший закон термодинаміки

Згідно із законом збереження енергії, першим принципом термодинаміки **[5, 6]**, швидкість зміни густини повної енергії $E_{повн}$ матеріалу дорівнює сумі потужностей зовнішніх сил N і кількості тепла Q, отриманої тілом за одиницю часу:

$$\frac{d}{d\tau} E_{\text{ïîâ}} = N + Q. \tag{27}$$

Повна енергія є адитивною функцією стану матеріалу. Її значення дорівнює алгебраїчній сумі значень кінетичної та внутрішньої енергій.

Кінетична енергія K матеріальної точки є прямопропорційною квадрату швидкості її руху. У випадку суцільних середовищ вона визначається за формулою **[5]**

$$K = \int_{V(\tau)} \frac{1}{2} \rho \upsilon^2 dV(\tau). \tag{28}$$

Внутрішня енергія E є функцією стану системи (матеріалу). У більшості випадків вона є адитивною величиною, тому можна припустити, що

$$E = \int_{V(\tau)} \rho e dV(\tau), \tag{29}$$

де e – питома внутрішня енергія (енергія, віднесена до одиниці маси).

Кількість теплоти Q, яку отримує (віддає) деревина в умовах гідротермічної обробки, визначається кондуктивним Q_1 та конвективним Q_2 складниками перенесення тепла, а також складником Q_3, зумовленим фазовими перетвореннями вологи з рідкого у газоподібний стани **[2]**.

Складник Q_1 можна описувати законом теплопровідності Фур'є, який у інтегральній формі запису має вигляд **[2]**

$$Q_1 = \oint_{S(\tau)} \lambda \, grad T d\vec{S}(\tau), \tag{30}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності деревини.

Конвективний складник Q_2, зумовлений процесами вологоперенесення. За даними досліджень **[2]**, він визначається за формулою

$$Q_2 = -\oint_{S(\tau)} h \vec{j}_{\text{ãî ë}} d\vec{S}(\tau), \tag{31}$$

де h – питома ентальпія вологої деревини. Знак "–" у (31) вказує на те що в умовах гідротермічної обробки перенесення тепла у вигляді вологи здійснюється в напрямі матеріал–навколишнє середовище.

Складник Q_3 прямопропорційний швидкості зміни вологовмісту матеріалу. Він описується співвідношенням **[2]**

$$Q_3 = \int_{V(\tau)} \delta \rho \gamma \frac{\partial U}{\partial \tau} dV(\tau), \tag{32}$$

де δ – коефіцієнт фазового переходу для вологої деревини; γ – питома теплота випаровування (питома теплота фазового переходу вологи з рідкого у газоподібний стан).

Потужність зовнішніх сил N дорівнює сумі робіт, виконаних за одиницю часу поверхневими силами **[9]**

$$E_S = \oint_{S(\tau)} \vec{\sigma}_n \vec{\upsilon} dS(\tau), \tag{33}$$

об'ємними силами **[5]**

$$E_V = \int_{V(\tau)} \rho \vec{f} \vec{\upsilon} dV(\tau), \tag{34}$$

та реактивними силами

$$E_m = \int_{V(\tau)} \left\{ q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} \vec{\upsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right) \right\} dV(\tau). \tag{35}$$

Формулу (35) виведено на основі рівняння динаміки матеріальної точки з масою $\rho \Delta V$

$$\vec{F}_m^{dV} = \rho \Delta V \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau}, \tag{36}$$

де символом $\vec{F}_m^{dV}$ позначено реактивний складник сил деформування матеріалу. Для обґрунтування цього твердження знайдемо елементарну роботу δA, виконану силою $\vec{F}_m^{dV}$. Для цього векторну величину $\vec{F}_m^{dV}$ скалярно помножимо на відповідне елементарне переміщення $d\vec{r}$. У результаті отримаємо

$$\delta A = \vec{F}_m^{dV} d\vec{r} = \rho \Delta V \frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau} d\vec{r}. \tag{37}$$

Перетворимо це рівняння, скориставшись очевидними тотожностями та визначеннями:

значення скалярного добутку $\frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau}d\vec{r}$ тотожно дорівнює значенню скалярного добутку векторних величин $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ і $d\vec{\upsilon}$, тобто

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{d\tau}d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}d\vec{\upsilon}\,. \qquad (38)$$

похідна $d\vec{r}/d\tau$ є визначенням миттєвої швидкості руху матеріальної точки

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{\upsilon}\,. \qquad (39)$$

Тоді,(36) перепишеться у вигляді

$$\vec{F}_m^{dV} d\vec{r} = \rho\Delta V\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}\,. \qquad (40)$$

Величина $\rho\Delta V\vec{\upsilon}$ характеризує імпульс матеріальної точки. Згідно з (9) вона є залежною від різниці швидкостей $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}$, а її значення тотожно дорівнює значенню виразу $q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon}\right)\Delta V$, тому

$$\vec{F}_m^{dV} d\vec{r} = q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon}\right)d\vec{\upsilon}\,. \qquad (41)$$

Скалярний добуток $\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon}\right)d\vec{\upsilon}$ дорівнює нескінченно малій зміні різниці скалярних добутків $\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right)$ та $\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right)/2$, тобто

$$\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}} - \vec{\upsilon}\right)d\vec{\upsilon} = d\left\{\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right)\right\}. \qquad (42)$$

Звідси, підставивши (42) у (41), отримаємо

$$\delta A = \vec{F}_m^{dV} d\vec{r} = d\left(q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right) - \left(\frac{1}{2}q\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right)\right)\right). \qquad (43)$$

Аналіз отриманої формули свідчить, що елементарна робота, яку виконують реактивні сили над матеріальною точкою змінної маси, не залежить від форми траєкторії її руху. Вона визначається значеннями скалярних добутків $\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right)$ і $\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right)/2$ до та після виділення (поглинання) вологи матеріальною точкою. Тому, враховуючи, що до виділення вологи значення величин $\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}$ та $\vec{\upsilon}$ дорівнюють нулеві, робота $\vec{F}_m^{dV}d\vec{r}$, виконана за одиницю часу реактивними силами $\vec{F}_m^{dV}$, дорівнює значенню виразу $q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right) - q\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right)/2$. Таким чином, потужність реактивних сил, віднесена до одиничного об'єму деформованого матеріалу, визначають за формулою (35), що і треба було довести.

Підставимо (28)-(35) у (27), тоді закон збереження енергії (27) для деформованої деревини зі змінним вологовмістом запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\int\limits_{V(\tau)}\left(\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho e\right)dV(\tau) = \\ &= \int\limits_{V(\tau)}\left(\rho\vec{f}\vec{\upsilon} + q\left(\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\vec{\upsilon}\right) - \frac{\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}}{2} + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)dV(\tau) + \\ &+ \oint\limits_{S(\tau)}\left(\vec{\sigma}_n\vec{\upsilon}\right)dS(\tau) + \oint\limits_{S(\tau)}\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right)dS(\tau).\end{aligned} \qquad (44)$$

Подамо отримане рівняння у локальній формі запису. Для цього перетворимо його обидві частини. У правій частині інтеграли по поверхні замінимо на інтеграли по об'єму:

$$\oint\limits_{S(\tau)}\left(\lambda gradT + h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right)dS(\tau) = \int\limits_V div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right)dV\,; \qquad (45)$$

$$\oint\limits_{S(\tau)}\vec{\sigma}_n\vec{\upsilon}dS(\tau) = \oint\limits_S\sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\vec{\upsilon}n_k dS(\tau) = \oint\limits_S\sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\vec{\upsilon}dS_k = \int\limits_V\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\vec{\sigma}_k\vec{\upsilon}}{\partial x_k}dV\,. \qquad (46)$$

Для перетворення лівої частини рівняння (44) скористаємося співвідношенням **[8]**

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\int\limits_V\rho\left(x_k,\tau\right)dV = \\ &= \int\limits_{V(\tau)}\frac{\partial\rho\left(x_k,\tau\right)}{\partial\tau}dV + \int\limits_{V(\tau)}\rho\left(x_k,\tau\right)div\vec{\upsilon}dV\end{aligned}\,. \qquad (47)$$

Замінимо у ньому скалярну величину $\rho(x_k,\tau)$ на підінтегральний вираз $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho e$, тоді матимемо

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\int\limits_{V(\tau)}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2} + e\right)dV(\tau) = \\ &= \int\limits_{V(\tau)}\left\{\left(\frac{\upsilon^2}{2} + e\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \rho div\vec{\upsilon}\right) + \rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + \rho\vec{\upsilon}\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\tau}\right\}dV(\tau)\end{aligned}\,. \qquad (48)$$

Підставимо (46)-(45) у (44), тоді, врахувавши формулу (25) отримаємо

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\upsilon^2}{2} + e\right)q + \rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + \rho\vec{\upsilon}\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}q\left(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}\right) = q\vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}.}\vec{\upsilon} + \\ &+ \rho\vec{f}\vec{\upsilon} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\vec{\sigma}_k\vec{\upsilon}}{\partial x_k} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right) + \delta\rho\gamma\frac{dU}{d\tau}.\end{aligned} \qquad (49)$$

Звідси

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + qe + q\vec{\upsilon}\left(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\right) + \rho\vec{\upsilon}\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\tau} = \rho\vec{f}\vec{\upsilon} + \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\vec{\upsilon}\frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial\tau}.\end{aligned} \qquad (50)$$

Перенесемо два перших доданки правої частини рівняння (50) у ліву частину та згрупуємо доданки з множником $\vec{\upsilon}$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + qe + \vec{\upsilon}\left(\rho\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial\tau} + q\left(\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_{\text{ãî ë}}\right) - \rho\vec{f} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\vec{\sigma}_k}{\partial x_k}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial\tau}.\end{aligned} \qquad (51)$$

За другим законом динаміки руху суцільного (19), третій доданок лівої частини отриманої рівності дорівнює нулеві. Отже, закон збереження енергії (27) для деформованих матеріалів зі змінним вологовмістом у диференціальній формі запису має вигляд

$$\rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + qe = \sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial\tau}\,. \qquad (52)$$

Або, оскільки за визначенням **[10]**

$$\sum_{k=1}^{3}\vec{\sigma}_k\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{kj}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_k}\,, \qquad (53)$$

то

$$\rho\frac{\partial e}{\partial\tau} + qe = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{kj}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_k} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{ãî ë}}\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial\tau}\,. \qquad (54)$$

3. Виведенняд рівняння теплоперенесення для деформованих в умовах сталого тиску в'язкопружних матеріалів

В умовах конвективного вологовидалення зміна тиску агента сушіння є не значною **[2]**. Цей процес вважатимемо ізобарним. Зміна термодинамічного стану висушуваного матеріалу у цьому випадку визначається так званою функцією стану – ентальпією **[2]**. Тому для виведення рівняння теплоперенесення доцільно питому внутрішню енергію *e* у законі збереження енергії (54) виразити через питому ентальпію *h*. Для цього у (54) замінимо тензор напружень σ_{kj} на суму **[11]**

$$\sigma_{kj} = \sigma_{kj}^{\text{ïð}} + \sigma_{kj}^{\text{ä}}, \qquad (55)$$

де $\sigma_{kj}^{\text{ïð}}$ і $\sigma_{kj}^{\text{ä}}$ – пружний та дисипативний складники напружень σ_{kj} відповідно. Тоді, оскільки за даними роботи **[**11**]**

$$\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \tau} = \upsilon_{jk} = \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right), \qquad (56)$$

то

$$\begin{gathered} \rho\left(\frac{\partial e}{\partial \tau} - \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ïð}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} \right) + qe = \\ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + div\left(\lambda gradT - h\vec{j}_{\text{âî ë}} \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau} \end{gathered}. \qquad (57)$$

Але, за визначенням **[**12**]**, другий множник першого доданка у лівій частині отриманого рівняння є визначенням швидкості зміни питомої ентальпії

$$h = e - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\sigma_{ij}^{\text{ïð}}\varepsilon_{ij}}{\rho}, \qquad (58)$$

тому з врахуванням зазначеного

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial h}{\partial \tau} + qh + q\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\sigma_{ij}^{\text{ïð}}\varepsilon_{ij}}{\rho} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + \\ + div\left(\lambda gradT \right) - div\left(h\vec{j}_{\text{âî ë}} \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau} \end{gathered}. \qquad (59)$$

Для подальшого спрощення цього рівняння використаємо рівність

$$divh\vec{j}_{\text{âî ë}} = -qh + \left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradh \right), \qquad (60)$$

яка є результатом підстановки співвідношення (25) у тотожність

$$divh\vec{j}_{\text{âî ë}} = hdiv\vec{j}_{\text{âî ë}} + \left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradh \right). \qquad (61)$$

Тоді, з огляду на формули (60) та (24), рівняння (59) перепишеться у вигляді

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho}{J}\frac{\partial J}{\partial \tau} \right)\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ïð}}\varepsilon_{ij} = \\ = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + div\left(\lambda gradT \right) - \left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradh \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau}. \end{gathered} \qquad (62)$$

Значення другого доданка у лівій частині (59) дорівнює нулю. Дійсно, оскільки, за даними роботи **[8]**, густина деформованого матеріалу є обернено пропорційна якобіану градієнтів руху з коефіцієнтом пропорційності, значення якого дорівнює густині $\rho_{\text{í.ò}}$ матеріалу у недеформованому стані (J=1), тобто

$$\rho = \frac{\rho_{\text{í.ò.}}}{J}, \qquad (63)$$

то

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho}{J}\frac{\partial J}{\partial \tau} \right) = 0. \qquad (64)$$

Отже,

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho}{J}\frac{\partial J}{\partial \tau} \right)\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ïð}}\varepsilon_{ij} = 0, \qquad (65)$$

що і необхідно було показати.

Таким чином, математична модель закону збереження енергії (54) для висушуваних в умовах сталого тиску в'язкопружних матеріалів має вигляд

$$\rho\frac{\partial h}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + div\left(\lambda gradT \right) - \left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradh \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau}. \qquad (66)$$

Отриману модель покладемо в основу виведення рівняння теплоперенесення. Для його отримання виразимо величину h через термодинамічну температуру T. Для цього скористаємося результатами досліджень **[2]**, автори яких встановили, що у випадку ізобарних процесів відношення приросту питомої ентальпії Δh до приросту абсолютної температури у граничному випадку $\left(\Delta T \to 0 \right)$ є сталою величиною. Це відношення є визначенням питомої теплоємності матеріалу (деревини) за сталого тиску

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{P=const} = C_P, \qquad (67)$$

де C_P – питома теплоємність матеріалу за сталого тиску. Тому, оскільки

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial h}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \tau}; \qquad (68)$$

$$gradh = \frac{\partial h}{\partial T}gradT, \qquad (69)$$

то на підставі зазначених формул (67)-(69) рівняння (66) запишеться у вигляді

$$\begin{gathered} \rho C_P\frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + div\left(\lambda gradT \right) - \\ - C_P\left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradT \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau} \end{gathered}. \qquad (70)$$

Помножимо це рівняння на якобіан градієнтів руху точок суцільного середовища *J*. Як результат, з огляду на формулу (63), отримаємо математичну модель для визначення процесів перенесення тепла у деформованих в'язко-пружних матеріалах

$$\begin{gathered} \rho_{\text{í.ò.}}C_P\frac{\partial T}{\partial \tau} = J\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{\text{ä}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + \\ + J\left(div\left(\lambda gradT \right) - C_P\left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradT \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \end{gathered}. \qquad (71)$$

Проаналізуємо отриману модель. Для цього розглянемо часткові випадки.

Випадок I. Якобіан градієнтів руху точок суцільного середовища дорівнює одиниці, а значення компонентів в'язкого складника $\sigma_{ij}^{\text{ä}}$ тензора напружень σ_{ij} – нулеві. У цьому випадку з огляду на формулу (63), об'єм матеріалу є сталим, значення теплоємності C_P дорівнює значенню теплоємності C_V при сталому об'єму, а рівняння (71) зводиться до рівняння теплоперенесення А.В. Ликова

$$\rho_{\text{í.ò.}}C_V\frac{\partial T}{\partial \tau} = div\left(\lambda gradT \right) - C_V\left(\vec{j}_{\text{âî ë}}gradT \right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau}. \qquad (72)$$

Отже, модель А.В. Ликова описує закономірності перенесення тепла зазвичай у недеформованих та малостисливих абсолютно пружних твердих тілах. Вона є частковим випадком моделі (71), що є хорошим підтвердженням достовірності рівняння (71).

Випадок 2. Значення компонентів в'язкого складника $\sigma_{ij}^{ä}$ тензора напружень σ_{ij} дорівнюють нулеві, а значення величини *J* є відмінними від одиниці. У цьому випадку процеси теплоперенесення описуються рівнянням

$$\rho_{í.ò.} C_P \frac{\partial T}{\partial \tau} = J\left(div\left(\lambda gradT\right) - C_P\left(\vec{j}_{\hat{a}\hat{i}\ddot{e}} gradT\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau}\right). \quad (73)$$

Це рівняння, з одного боку, є частковим випадком моделі (71), а з іншого своєрідним узагальненням рівняння теплоперенесення А.В. Ликова. Порівняно із моделлю (72), воно ширше відображає основні чинники впливу на закономірності розвитку температурних полів у гігроскопічних пружних тілах зі змінним вологовмістом. Зокрема, з порівняльного аналізу рівнянь (72) та (73) витікає що швидкість зміни температури у висушуваних пиломатеріалах є залежною не лише від градієнтів температури та швидкості зміни вологи, але і від їх напружено-деформівного стану. Значення цієї величини для деформованих пружних матеріалів у *J* разів більше, ніж для недеформованих. Понад це, оскільки значення величини *J* є залежним від способу деформування, то швидкість протікання процесів теплоперенесення є залежною від характеру дії полів напружень. З огляду на формули (72) та (73), рівномірно-розподілені поля напружень усебічного розтягу (*J*>1) пришвидшують розвиток цих процесів, а поля напружень усебічного стиску (*J*<1) – сповільнюють. Виявлений вплив полів напружень на рух тепла у деформованих пружних матеріалах зі змінним вологовмістом є очевидним. Він обґрунтовується зміною площі контактної поверхні взаємодії елементарного об'єму матеріалу з навколишнім середовищем. Чим більше значення об'єму деформованого матеріалу, тим більшою є площа його поверхні, а чим більша ця площа, тим швидше нагрівається або охолоджується матеріал. Отже, модель (73) адекватно відображає реальні процеси теплоперенесення у деформованих пружних тілах зі змінним вологовмістом та однорідним напружено-деформівним станом.

Висновки

Проаналізовані випадки та їх фізична інтерпретація, а також аналіз робіт **[**1, 8**]** дають змогу зробити важливі для технології гідротермічної обробки деревини висновки:

1) одним із основних чинників впливу на процеси теплоперенесення у висушуваній деревині є розвиток пружних полів напружень в їх об'ємі;

2) вплив пружних полів напружень на процеси теплоперенесення у різних частинах об'єму висушуваного пиломатеріалу конвективним способом є різним. У поверхневих шарах матеріалу він пришвидшує протікання цих процесів, а у внутрішніх, навпаки, – сповільнює.

На завершення та для проведення подальших досліджень зазначимо, що у випадку деревини, висушуваної конвективним способом, не всі чинники, які визначають закономірності протікання процесів перенесення тепла, є значущими, зокрема, незначним є вплив складника $C_P\left(\vec{j}_{\hat{a}\hat{i}\ddot{e}} gradT\right)$. Для більшості порід деревини абсолютні значення цього складника у будь-який момент часу вологовидалення є меншими за всі інші складники на порядок **[**2**]**. У цьому випадку цим складником можна знехтувати.

Отже, рівняння теплоперенесення для деревини, висушуваної конвективним способом, має вигляд

$$\rho_{í.ò} C_P \frac{\partial T}{\partial \tau} \approx J\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{ä}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + J\left(div\left(\lambda gradT\right) + \delta\rho\gamma\frac{\partial U}{\partial \tau}\right). \quad (74)$$

ЛІТЕРАТУРА

1.СоколовськийЯ.І. Деформативність деревини й деревностружкових плит зі змінними потенціалами тепломасоперенесення: Автореф. дис.... д-ра техн. наук: 05.05.07– Машини та процеси лісівничого комплексу. – Львів, 2001. – 36с.

2.ЛыковА.В.Теория сушки. – М.: Энергия, 1968. – 472с.

3.ПоберейкоБ.П. Ідентифікація напружено-деформівного стану деревини із змінним вологовмістом: Автореф. дис.... канд. тех. наук: 05.05.07– Машини та процеси лісівничого комплексу. – 16 с.

4.СерговскийП.С., РасевА.И. Гидротермическая обработка и консервирование древесины: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Лесн. пром-сть, 1987. – 360с.

5.ПетровН., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 243С.

6. МултановскийВ.В. Курс теоретической физики. – М.: Просвещение, 1988. – 304с.

7.СеньківМ.Т.Векторний і тензорний аналіз: Текст лекцій. – Львів: Ред.-вид. відділ Львів. ун-ту, 1990. – 146с.

8.ПоберейкоБ.П., СоколовськийЯ.І. Дослідження процесів вологоперенесення всередині та на межі неруйнівної області деформування деревини // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2006. – Вип.16.6. – С. 82-90.

9.ШкільМ.І. та ін. Вища математика: Підручник: У 3-ох кн.: Кн. І.Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – К.: Либідь, 1994. – 280с.

10.СедовЛ.И. Механика сплошной среды, т.ІІ. – М.: Наука, 1973. – 584с.

11.ЛандауЛ.Д., ЛифшицЕ. М. Теоретическая физика. В 10-ти т, т.VII. Теория упругости: Учеб. пос. – 4-е изд. – М.: Наука, 1987. – 248с.

B. P. Pobereyko

RESEARCH OF HEAT TRANSFERENCE PROCESSES INSIDE AND ON BOARDER OF UNPESTRUCTIVE AREA OF WOOD DEFORMATION

The equalization of movement and heat transference for deformated wood with moisture as variable have been described. It is shown that the processes of heat transfer in saw timber under drying are dependent upon the fields of deformations. It is estimated that in the case of comprehensive compression the process of transferring heat into material is slaved. In case of comprehensive tension the processes are accelerated.